Analisi e controllo del Circuito Caotico di Sprott

Oggetto: Analisi e controllo di un circuito non lineare picewise smooth

Il Portale Tecnologico - www.lmweb.it
Autore: Luigi di Massa – info@lmweb.it

ELABORATO DI DINAMICA E CONTROLLO NON LINEARE

Chaotic Circuit – Relazione

1 SOMMARIO

2 Introduzione 2
3 Analisi del circuito 3
4 Modello nello spazio di stato e punti di equilibrio 7
4.1 Punti di equilibrio 7
5 Analisi della Stabilita' dei punti di equilibrio 9
6 Analisi parametrica 14
7 Esponenti di Lypaunov 22
8 Feedback Linearization - FBL 24
8.1 Inseguimento di traiettoria 27
9 Controllo Sliding 29
10 Controllo distribuito di sistemi multi-agente 33
10.1 Criterio di collegamento fra i nodi 33
10.2 Analisi di una rete con quattro nodi 35
10.2.1 Premessa: Norma degli errori 35
10.2.2 Caso $\boldsymbol{\sigma = 0}$ 36
10.2.3 Rete Totalmente Connessa - $\boldsymbol{\sigma = -3}$ 38
10.2.4 Rete ad Anello - $\boldsymbol{\sigma = -3}$ 40
10.2.5 Rete Generica - $\boldsymbol{\sigma = -3}$ 42
10.2.6 Conclusioni 44
11 Bibliografia 45

2 INTRODUZIONE

Scopo di questo elaborato è l'analisi di un sistema non lineare del terzo ordine del tipo:

$$\dddot{x} = F(\ddot{x}, \dot{x}, x)$$

Tali sistemi sono noti in letteratura come "Jerk System".

Il sistema considerato, è il circuito di Sprott [1] costituito da amplificatori operazionali ideali, condensatori e resistori.

In particolare in questo elaborato verrano illustrati:

- Come si è passati dal modello circuitale ad una equazione differenziale del terzo ordine, e successivamente ad un modello costituito da un sistema di equazioni differenziali del primo ordine accoppiate.
- Verrà trattata l'analisi del sistema, studiando i punti di equilibrio e la stabilità di tali punti
- Verrà poi analizzato il comportamento del sistema al variare di alcuni parametri di interesse mostrando come in alcuni range di parametri il sistema mostri un comportamento caotico.
- Verrà fatta un'analisi dell'attrattore caotico tramite gli esponenti di Lyapunov.
- Verranno mostrate alcune tecniche di controllo non lineare, quali sliding control e feedback linearization.
- Infine, verrà il controllo distribuito di una rete multi-agente di tali circuiti, considerando una legge di accoppiamento diffusiva fra i vari nodi

3 ANALISI DEL CIRCUITO

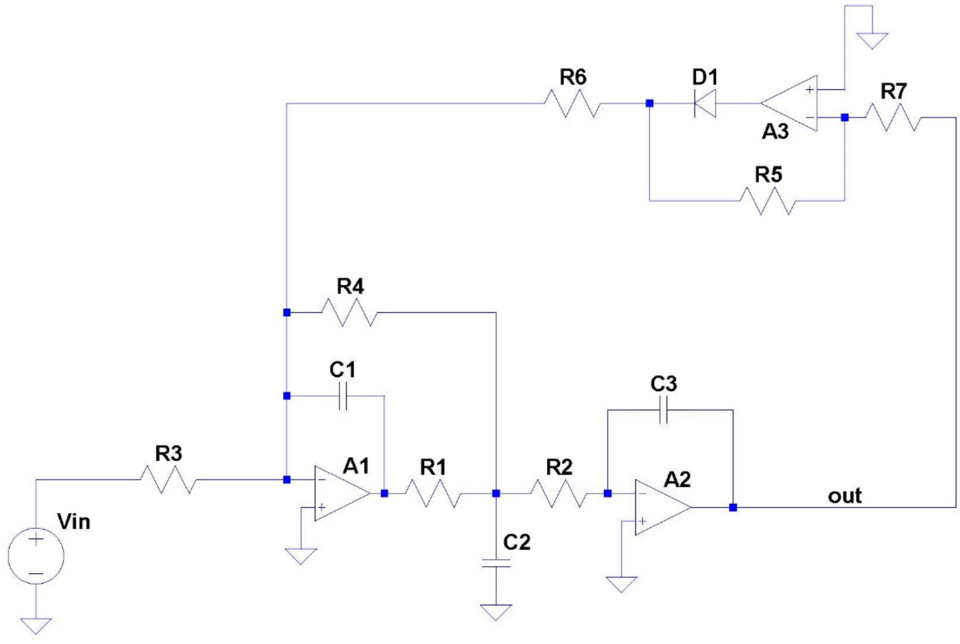


Figura 1

Per determinare tutte le equazioni che governano il circuito, si suppone che gli amplificatori operazionali considerati siano ideali. Pertanto con guadagno a ciclo aperto infinito, è lecito considerare che fra i terminali di ingresso degli amplificatori vi sia un “corto circuito virtuale”.

Risulta difficile scrivere direttamente le equazioni che governano tale circuito; pertanto esso verrà suddiviso in sotto circuiti e successivamente verranno ricavate le relazioni fra i vari sotto circuiti.

A tale scopo risulta utile considerare il seguente schema a blocchi rappresentativo del circuito soprariportato.

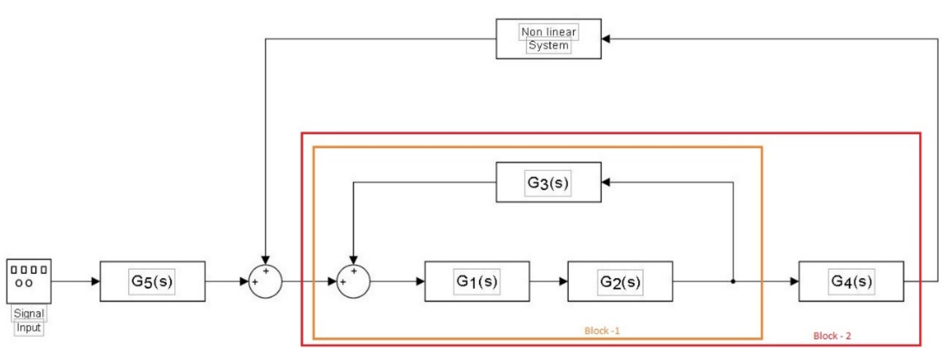
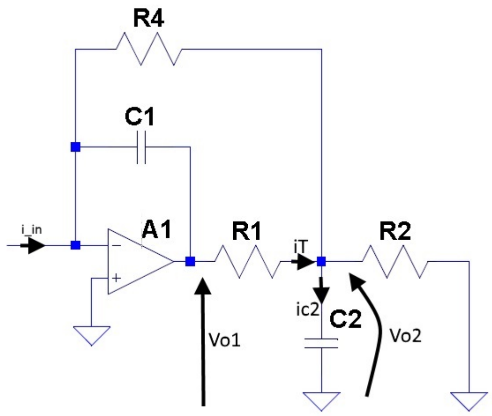
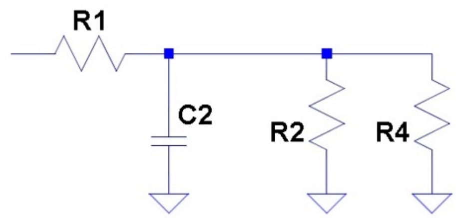


Figura 2

Si parte dalla analisi del blocco 1





Per l'analisi di questo circuito, verrà trovata prima la relazione che lega $\boldsymbol{V_{o2}}$ a $\boldsymbol{V_{o1}}$, ovvero $\boldsymbol{G_2(s)}$ e successivamente verrà trovata la relazione ingresso uscita di tale sottocircuito. (Avendo scelto come ingresso $\boldsymbol{i_{in}}$)

$$V_{o2} = i_{C_2} Z_{C_2} = V_{o1} - R_1 i_T$$

$$Z_T = R_1 + \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = R_1 + \frac{R_2 R_4}{sC_2 R_2 R_4 + R_2 + R_4}$$

$$i_T = \frac{V_{o1}}{Z_T} = V_{o1} \frac{sC_2 R_2 R_4 + R_2 + R_4}{R_1(sC_2 R_2 R_4 + R_2 + R_4) + R_2 R_4}$$

$$i_{C_2} = i_T \frac{\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}{sC_2 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} = V_{o1} \frac{sC_2 R_2 R_4}{R_1(sC_2 R_2 R_4 + R_2 + R_4) + R_2 R_4}$$

$$V_{o2} = i_{C_2} Z_{C_2} = i_{C_2} \frac{1}{sC_2} = V_{o1} \frac{sC_2 R_2 R_4}{R_1(sC_2 R_2 R_4 + R_2 + R_4) + R_2 R_4}$$

$$G_2(s) = \frac{V_{o2}}{V_{o1}} = \frac{sC_2 R_2 R_4}{R_1(sC_2 R_2 R_4 + R_2 + R_4) + R_2 R_4}$$

Ora, come anticipato vogliamo trovare una relazione che lega l'ingresso i_{in} al uscita V_{o2} di tale circuito.

Osserviamo che:

$$V_{o2} = -\frac{1}{sC_1} G_2(s) i_{\text{in}} - \frac{1}{sC_1 R_4} G_2(s) V_{o2}$$

Definendo:

$$G_1(s) = -\frac{1}{sC_1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{R_4}$$

Si ha che

$$V_{o2} = G_1(s) G_2(s) i_{\text{in}} + G_1(s) G_2(s) G_3(s) V_{o2}$$

E quindi la funzione di trasferimento del blocco 1, evidenziato in arancio nella figura soprariportata, è pari a:

$$G_{\text{block\_1}}(s) = \frac{V_{o2}}{i_{\text{in}}} = \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 - G_1(s) G_2(s) G_3(s)}$$

Risulta evidente che il blocco uno è in cascata con un integratore ideale.

Detta $G_4(s)$ la funzione di trasferimento di tale integratore, possiamo ricavare la funzione di trasferimento del blocco 2 evidenziato in rosso

$$G_{\text{block\_2}}(s) = G_{\text{block\_1}}(s) G_4(s)$$

Con

$$G_4(s) = -\frac{1}{sC_3 R_2}$$

Osservando che il circuito in retroazione sul blocco 2 può essere visto come una funzione non lineare che prende in ingresso la tensione di uscita del blocco 2 e genera una corrente pari al valore assoluto dell'ingresso.

Risulta chiaro che il sistema ottenuto è uno schema in retroazione con un sistema dinamico lineare sulla linea di azione ed una funzione non lineare in retroazione.

Pertanto:

- Passando dalla funzione di trasferimento $G_{\text{block\_2}}(s)$ ad una funzione ingresso uscita nel dominio del tempo
- Considerando la funzione non lineare in retroazione
- Ed il segnale di ingresso

Si ottiene che il sistema complessivo è governato da un'equazione differenziale del terzo ordine del tipo:

$$\dddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} = B|x| - V_{o1}G_5$$

Ove:

- $G_5 = \frac{1}{R_3}$
- A dipende dal valore componenti del circuito presenti nel blocco 2
- B dipende dal valore componenti del circuito presenti nel circuito di retroazione non lineare

D'ora in poi si supporrà che il segnale di ingresso sia un segnale di corrente. Pertanto si considererà:

$$\dddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} = B|x| - u$$

Il sistema potrà essere visto dal punto di vista ingresso uscita come:

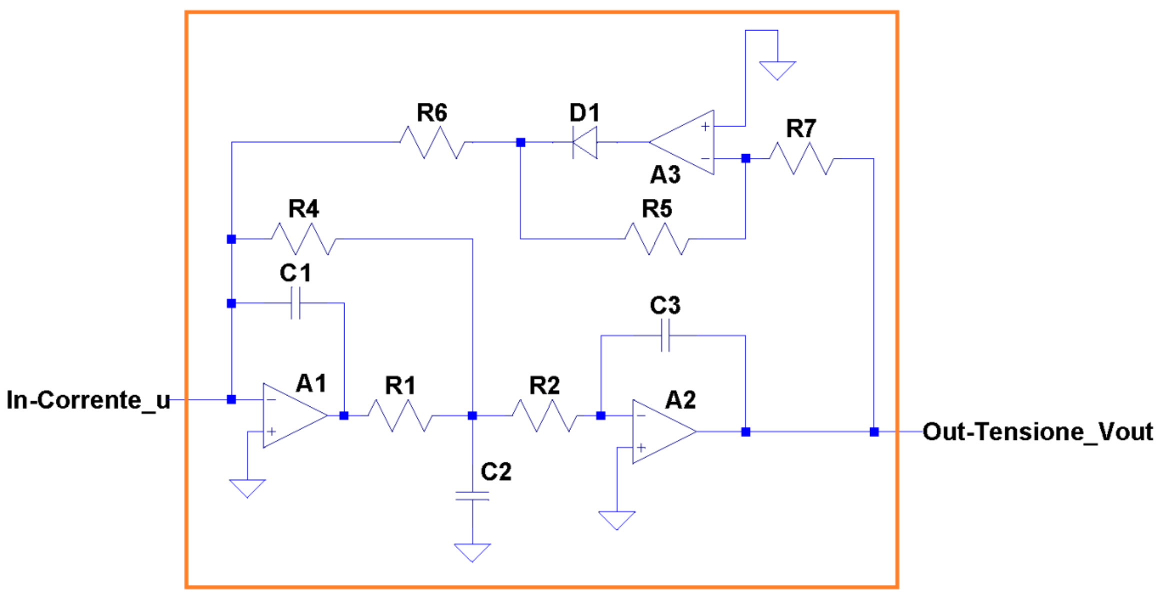


Figura 3

4 MODELLO NELLO SPAZIO DI STATO E PUNTI DI EQUILIBRIO

In definitiva il sistema considerato può essere descritto mediante la seguente "Jerk Equation":

$$\dddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} = G(x)$$

Ove la $G(x)$ considerata è pari a

$$G(x) = B|x| - u$$

Per proseguire i nostri studi è utile passare dalla seguente equazione differenziale del terzo ordine al seguente sistema equivalente di equazioni differenziali del primo ordine accoppiate

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = B|x_1| - x_2 - Ax_3 - u \end{cases}$$

Ovvero in forma compatta:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$$

Ove $\underline{f}$ è un campo vettoriale: $f: \Re^3 \rightarrow \Re^3$

Sia:

- Σ_1 la regione descritta da $x \in \Re^3: (x_1, x_2, x_3)\ con\ x_1 > 0$
- Σ_2 la regione descritta da $x \in \Re^3: (x_1, x_2, x_3)\ con\ x_1 < 0$

4.1 PUNTI DI EQUILIBRIO

I punti di equilibrio posso essere determinati risolvendo l'equazione

$$0 = \underline{f}(\underline{x}, u)$$

In assenza di segnale ($u = 0$) si ha che

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = x_3 \\ 0 = B|x_1| - x_2 - Ax_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio è l'origine

Quando è presente un segnale di ingresso ($u \neq 0$) si ha che:

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = x_3 \\ 0 = B|x_1| - x_2 - Ax_3 - u \end{cases} \qquad \begin{cases} |x_1| = u/B \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti di equilibrio sono:

$$P_1 = \begin{cases} x_1 = u/B \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ Se $x_1 > 0$

$$P_2 = \begin{cases} x_1 = -u/B \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ Se $x_1 < 0$

5 ANALISI DELLA STABILITA' DEI PUNTI DI EQUILIBRIO

In assenza di segnale ($u = 0$) abbiamo visto che l'unico punto di equilibrio è l'origine.

Purtroppo tale punto di equilibrio non è iperbolico e nulla si può dire sulla stabilità con il metodo della linearizzazione.

Con prove simulative si è visto che le variabili di stato divergono e quindi si intuisce che tale punto di equilibrio è instabile, ma non si è riusciti a trovare una funzione di Lyapunov che soddisfi il criterio di instabilità di Chetaev.

Quando ($u \neq 0$) vi sono due punti di equilibrio e per analizzare la stabilità, essendo tali punti non iperbolici è stato utilizzato il *metodo della linearizzazione*

Matrice Jacobiana

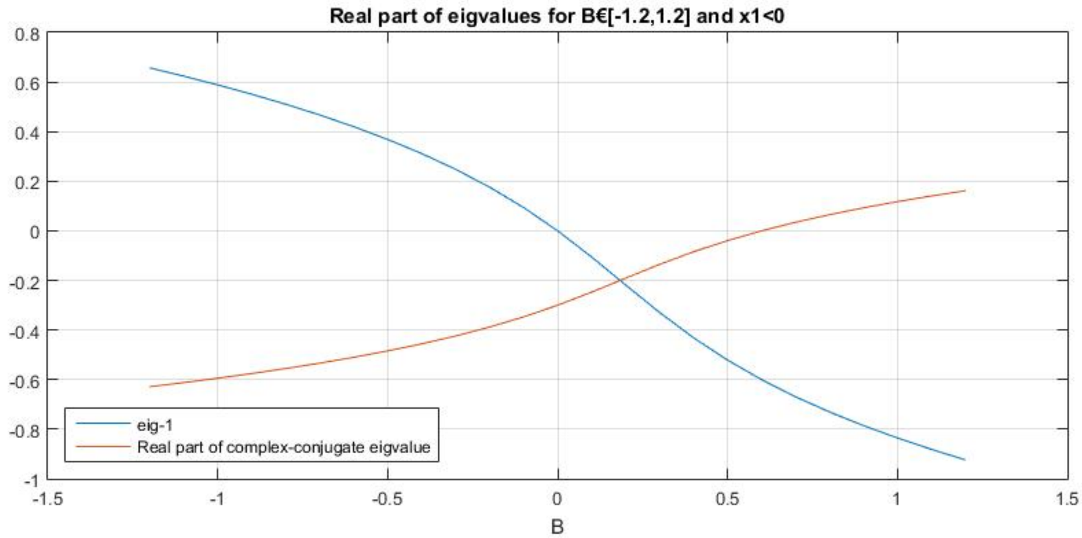
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ B\dfrac{|x_1|}{x_1} & -1 & -A \end{bmatrix}$$

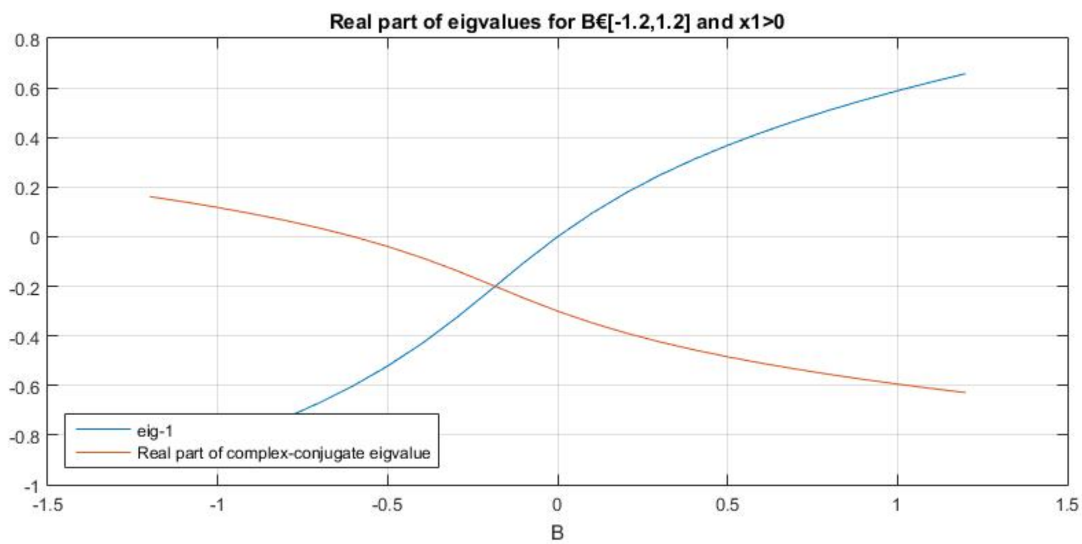
Fortunatamente la matrice Jacobiana trovata è in forma compagna e quindi il polinomio caratteristico può essere scritto immediatamente come:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + \lambda - B \ se \ x_1 > 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + \lambda + B \ se \ x_1 < 0$$

Dai Polinomi ottenuti è facile analizzare il segno degli autovalori al variare di B





Dai grafici sovra riportati risulta evidente che:

- quando $B \in [0,0.6]$ il punto di equilibrio P_2 risulta stabile
- quando $B \in [-0.6,0]$ il punto di equilibrio P_1 risulta stabile

Ma essendo questo sistema "*Picewise Smooth*" tale studio di stabilità deve essere utilizzato con molta attenzione. Infatti, osserviamo che:

CASO $u > 0 \; con \; u \; costante$

Si ha che

- Il punto P_1 si trova nella regione Σ_1 ed il punto P_2 nella regione Σ_2
- Se si considerano un valore di $B \in [0{,}0.6]$, condizioni iniziali ed un forzamento costante tali che l'evoluzione della variabile di stato x_1 resti sempre negativa, allora si avrà la convergenza al punto P_2
- Se si considerano un valore di $B \in [0{,}0.6]$, condizioni iniziali ed un forzamento costante tali che l'evoluzione della variabile di stato x_1 attraversi la discontinuità, allora non si potrà dire nulla sul comportamento a regime, perché vi potranno essere casi che la variabile x_1 rientri definitivamente nella regione Σ_2 e convergerà al punto di equilibrio P_2 e casi in cui si avrà divergenza delle variabili di stato

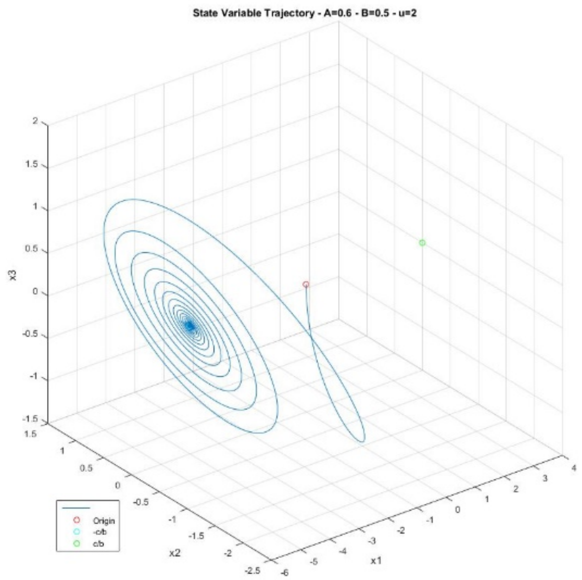
Si potrebbero effettuare studi per la determinazione del bacino di attrazione del punto di equilibrio in presenza di un forzamento costante assegnato, ma ciò non è di interesse ai fini di questo elaborato.

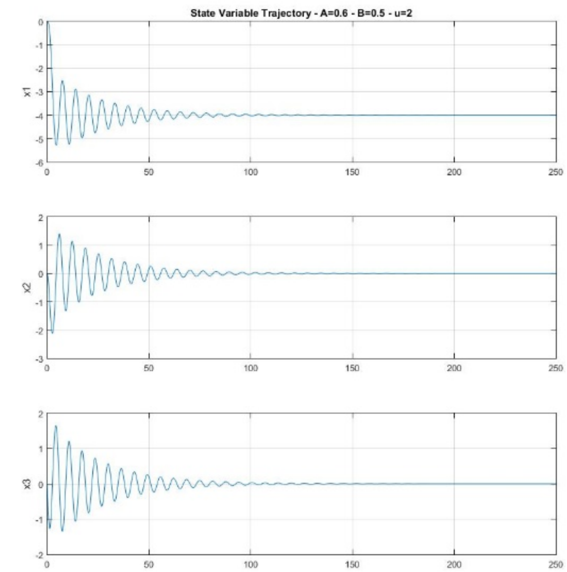
CASO $u < 0 \; con \; u \; costante$

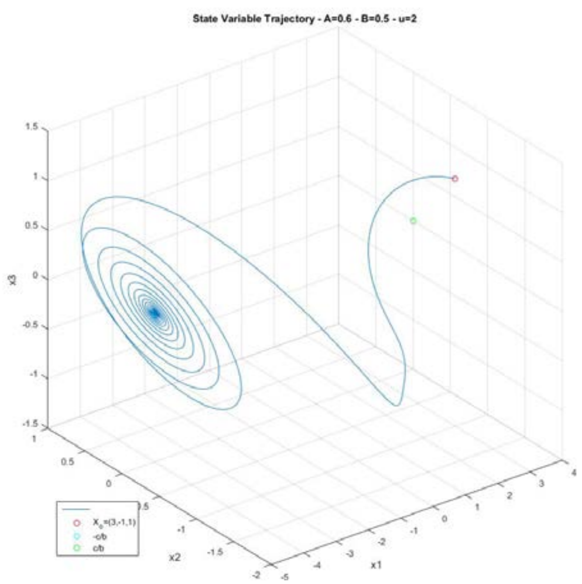
- Il punto P_1 si trova nella regione Σ_2 ed il punto P_2 nella regione Σ_1
- Vi sarà sempre una divergenza delle variabili di stato anche con valori di $B \in [-0.6{,}0]$

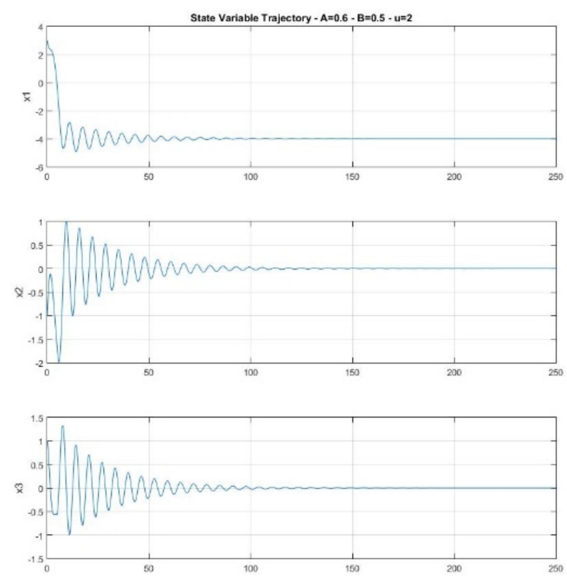
Anche in questo caso si potrebbero effettuare studi per la determinazione del bacino di attrazione del punto di equilibrio in presenza di un forzamento costante assegnato, ma ciò non è di interesse ai fini di questo elaborato.

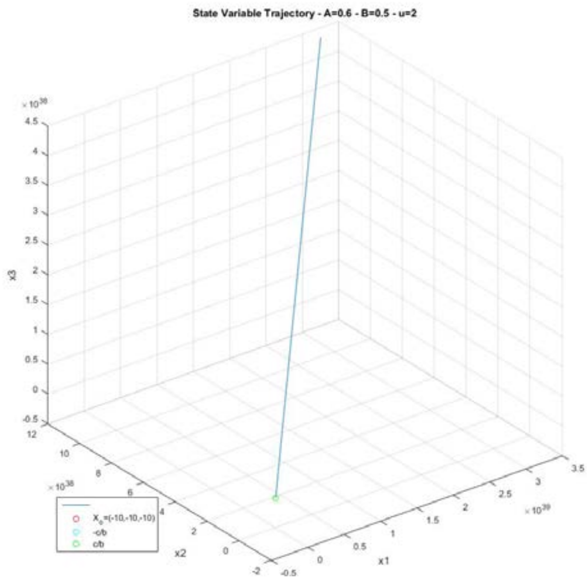
Di seguito sono riportate alcune simulazioni a scopo illustrativo:

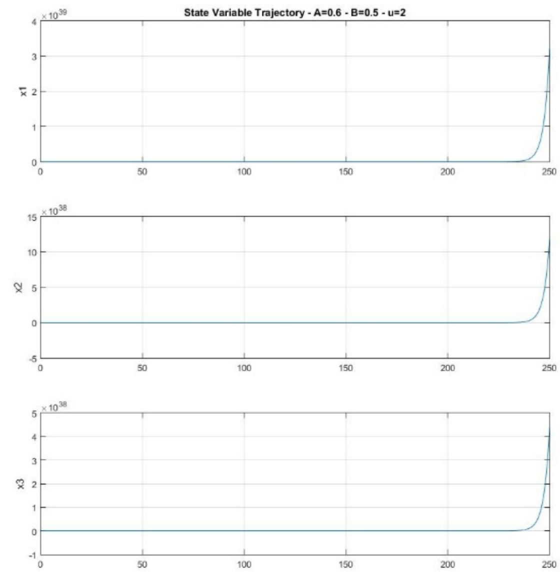

State Variable Trajectory - A=0.6 - B=0.5 - u=2
x3
x2
x1
Origin
-c/b
c/b


State Variable Trajectory - A=0.6 - B=0.5 - u=2
x1
x2
x3


State Variable Trajectory - A=0.6 - B=0.5 - u=2
x3
x2
x1
X0=(3,-1,1)
-c/b
c/b


State Variable Trajectory - A=0.6 - B=0.5 - u=2
x1
x2
x3


State Variable Trajectory - A=0.6 - B=0.5 - u=2
x3
x2
x1
X0=(-10,-10,-10)
-c/b
c/b


State Variable Trajectory - A=0.6 - B=0.5 - u=2
x1
x2
x3

6 ANALISI PARAMETRICA

In seguito ai risultati ottenuti nel paragrafo precedente è evidente che risulta veramente difficile determinare a priori il comportamento del sistema in presenza di un segnale e di una condizione iniziale arbitraria.

Dai risultati sperimentali del paragrafo precedente, risulta evidente che per

$$A = 0.6, B = 0.5, u(t) = k\ \forall t$$

Si ha o una convergenza al punto di equilibrio o una divergenza delle variabili di stato.

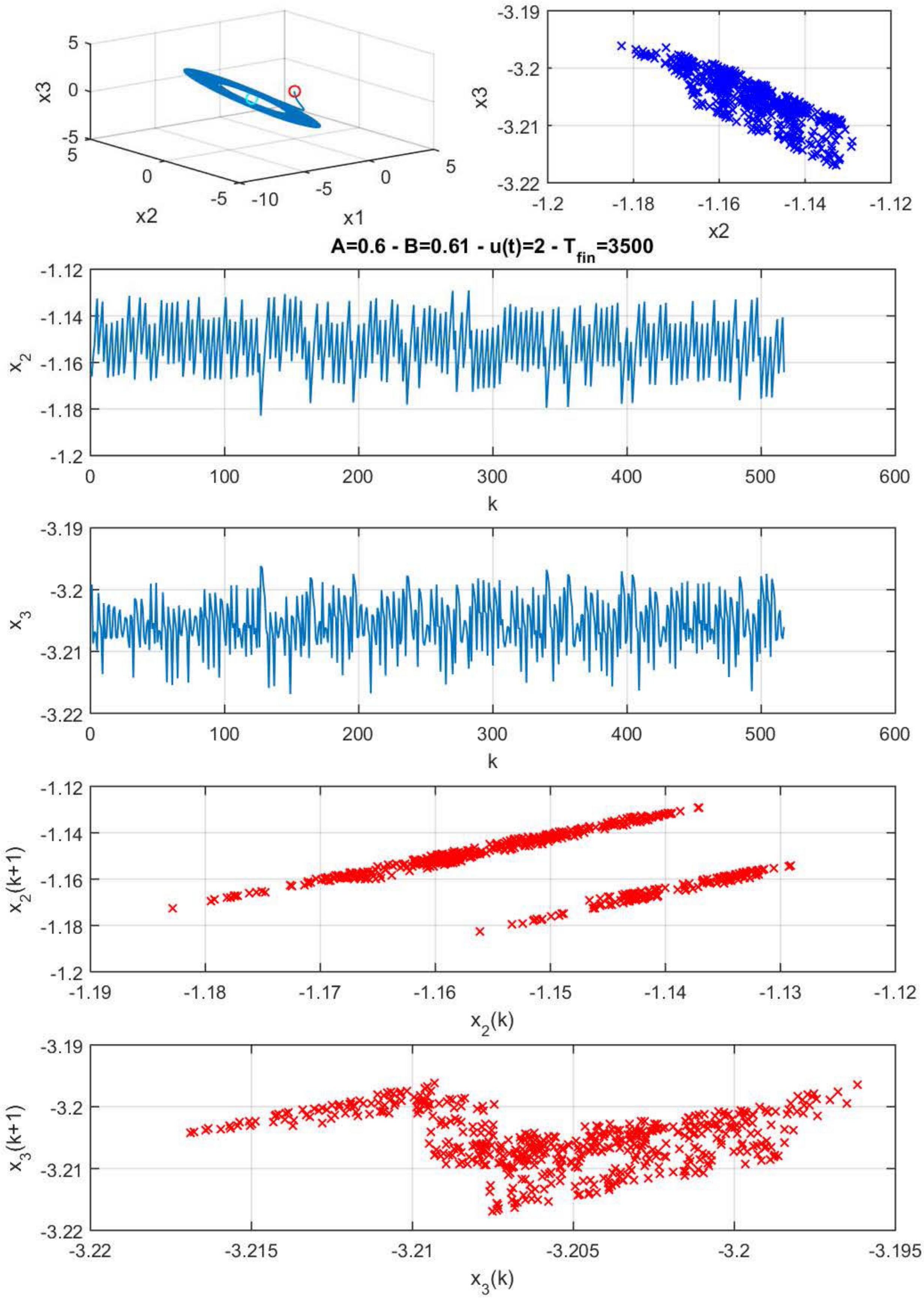
In questo paragrafo vogliamo mostrare un'altra importante proprietà di questo circuito.

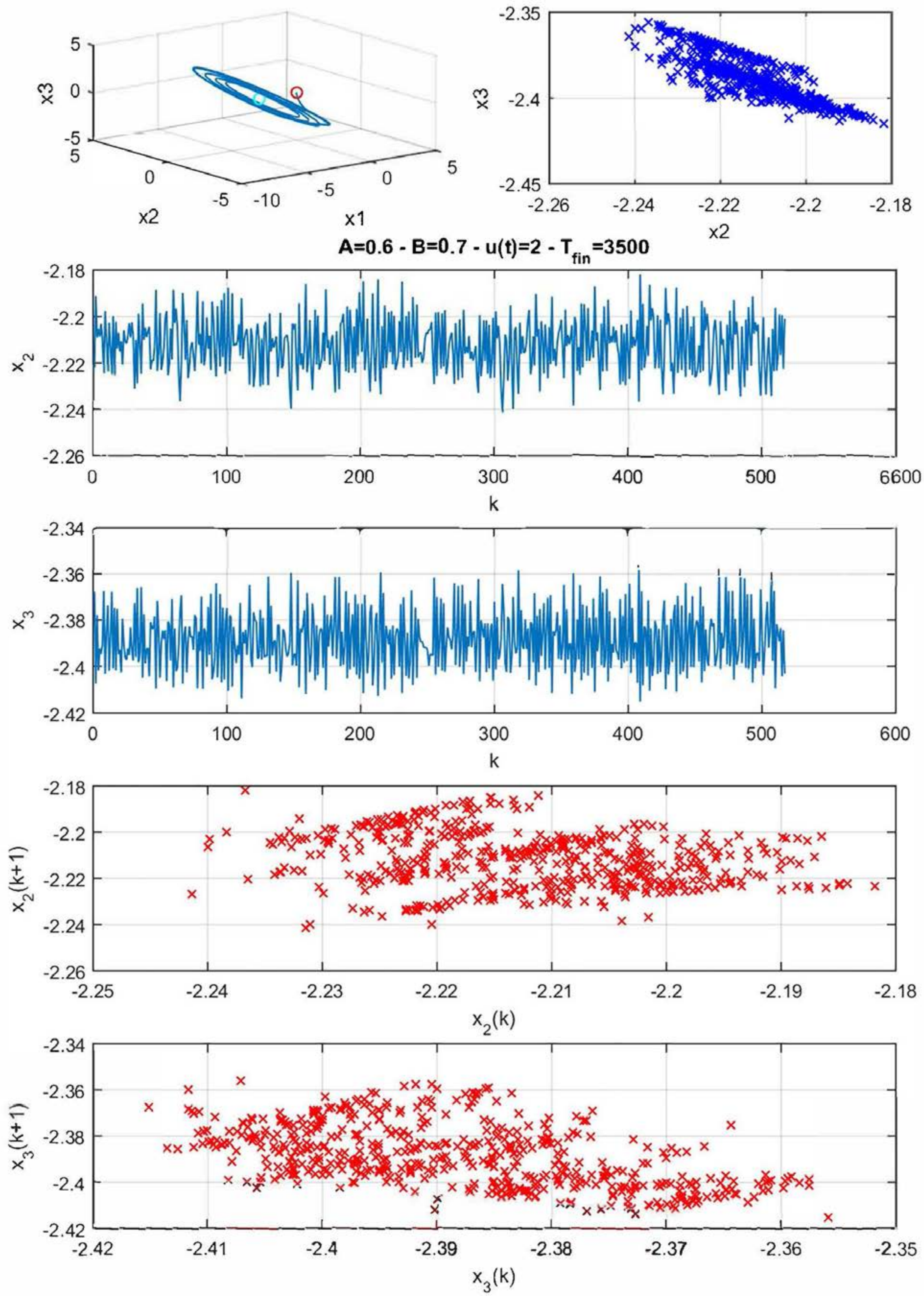
A tal fine consideriamo la seguente configurazione circuitale:

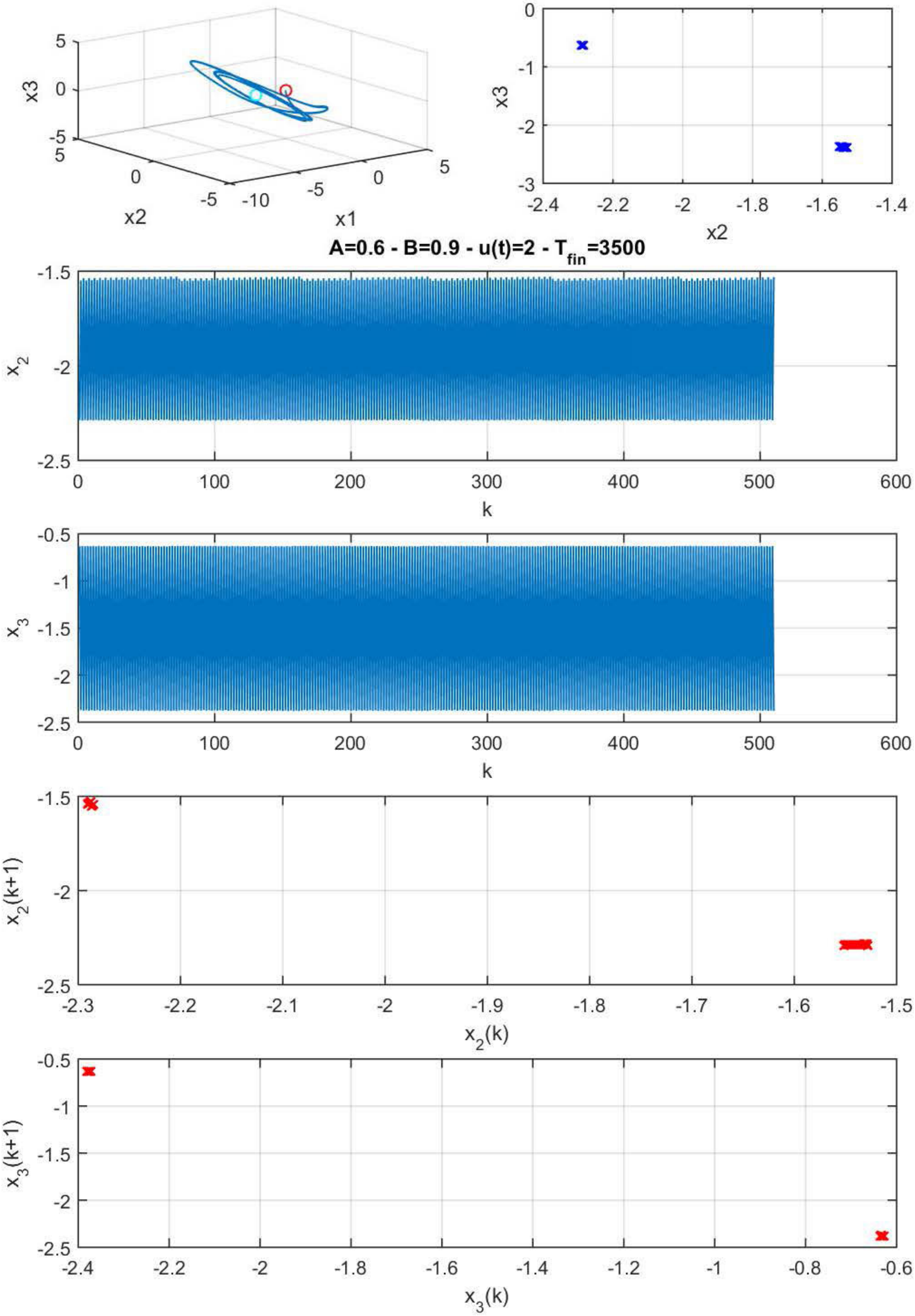
$$A = 0.6, x_0 = (0,0,0), u(t) = 2\ \forall t$$

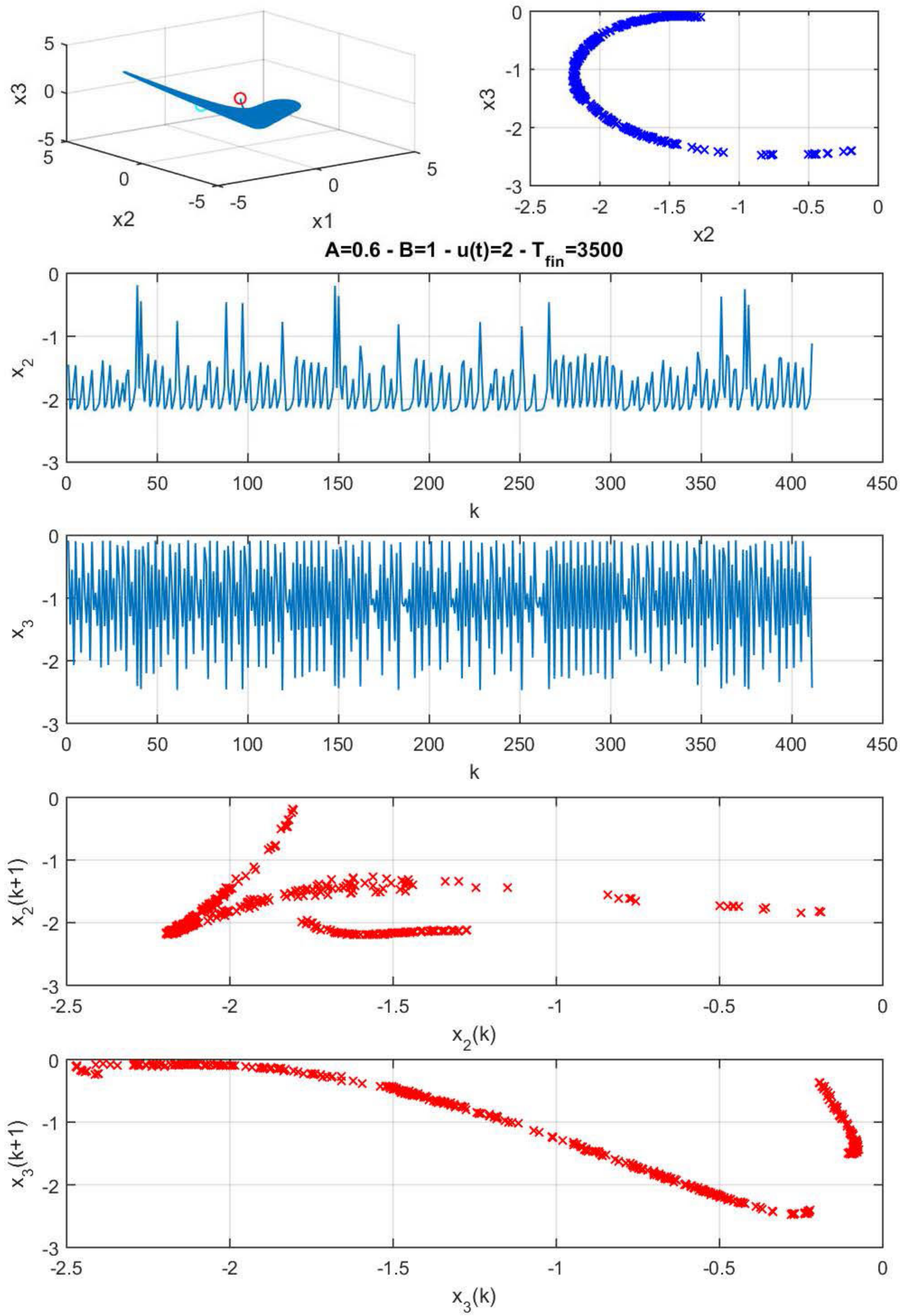
In seguito riportiamo alcune simulazioni al variare di B e per ogni simulazione riportiamo anche la mappa di Poincaré avendo scelto come piano di Poincaré il piano:

$$x_1 = 0, ovvero\ x\ \in\ \Re^3 : (0, x_2, x_3)$$

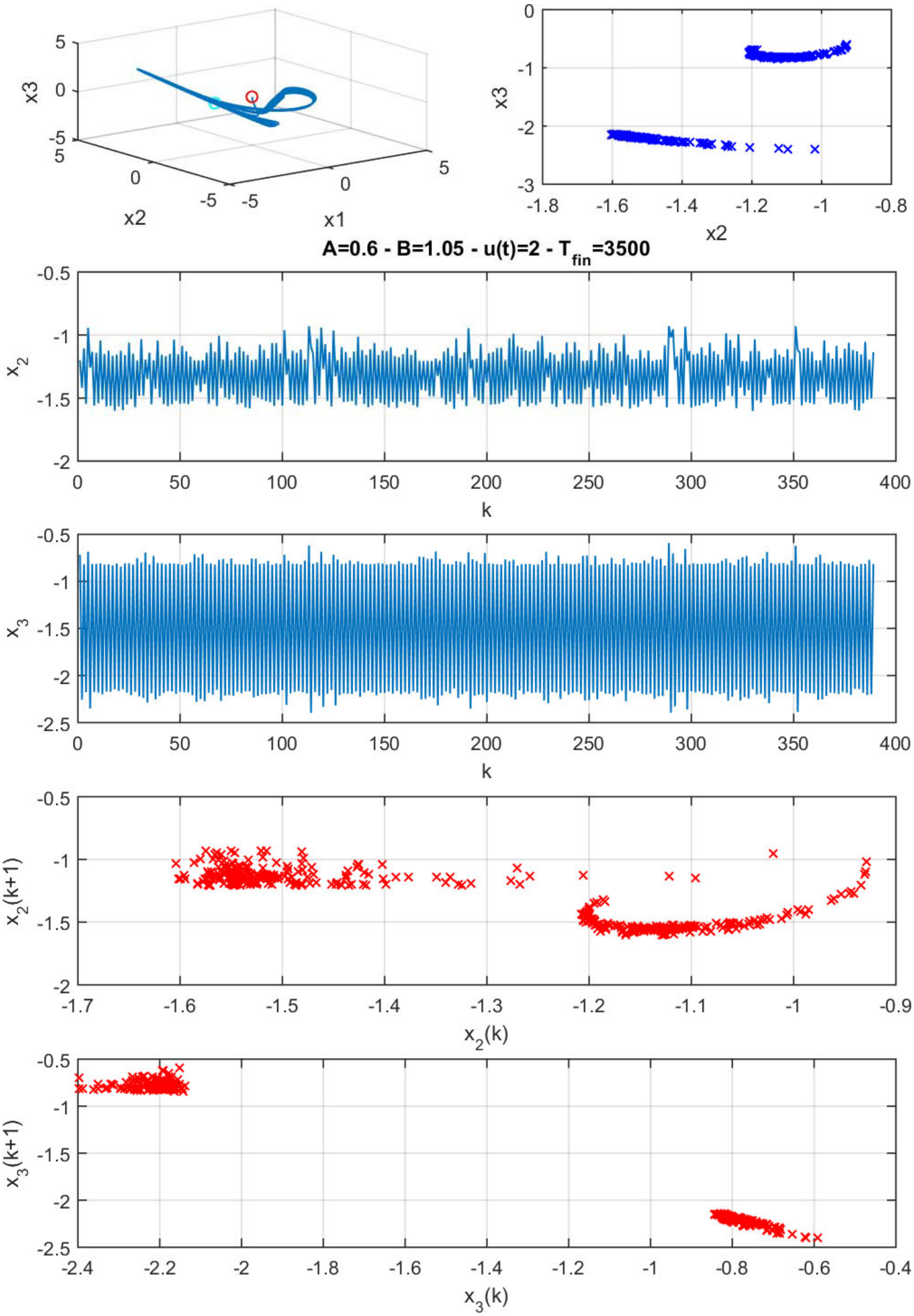

x3
x2
x1
A=0.6 - B=0.61 - u(t)=2 - T_fin=3500
x_2
k
x_3
k
x_2(k+1)
x_2(k)
x_3(k+1)
x_3(k)


A=0.6 - B=0.7 - u(t)=2 - T_{fin}=3500
x1
x2
x3
x_2
x_3
k
$x_2(k+1)$
$x_2(k)$
$x_3(k+1)$
$x_3(k)$


x3
x2
x1
A=0.6 - B=0.9 - u(t)=2 - T_{fin}=3500
x_2
k
x_3
k
$x_2(k+1)$
$x_2(k)$
$x_3(k+1)$
$x_3(k)$



x3
x2
x1
A=0.6 - B=1 - u(t)=2 - T_fin=3500
x_2
k
x_3
k
x_2(k+1)
x_2(k)
x_3(k+1)
x_3(k)

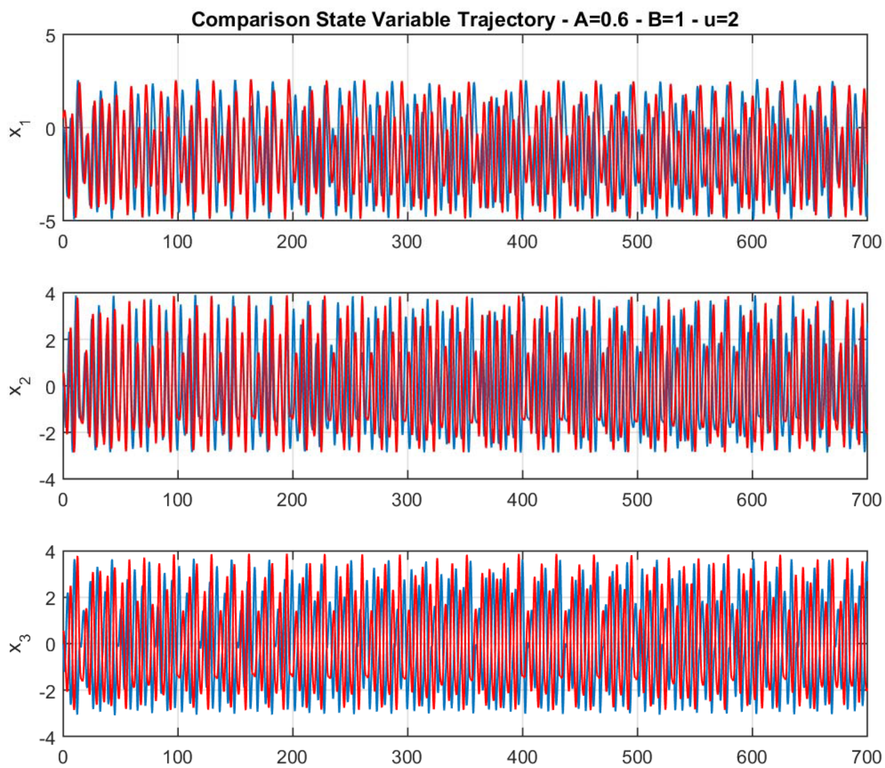

x3
x2
x1
A=0.6 - B=1.05 - u(t)=2 - T$_{fin}$=3500
x_2
k
x_3
k
x_2(k+1)
x_2(k)
x_3(k+1)
x_3(k)

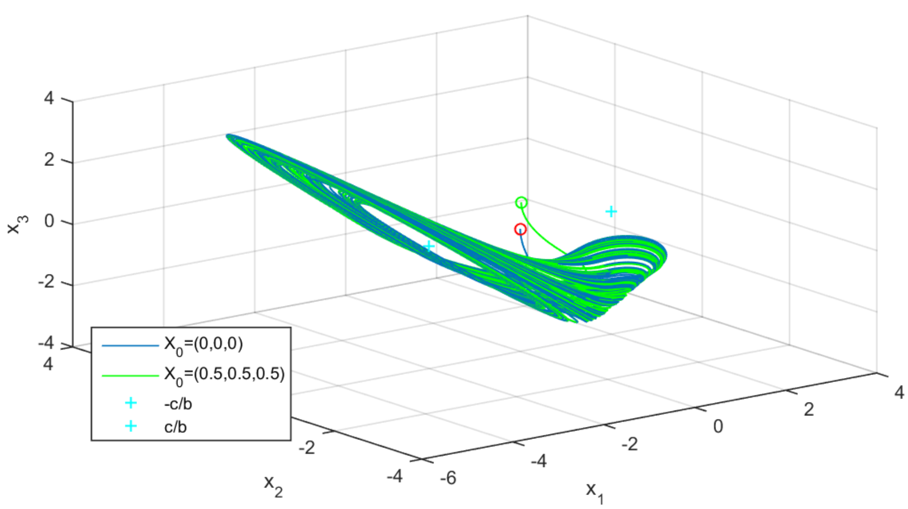
Dalle simulazioni risulta evidente che per tali valori dei parametri si ha un comportamento aperiodico del sistema, non divergente.

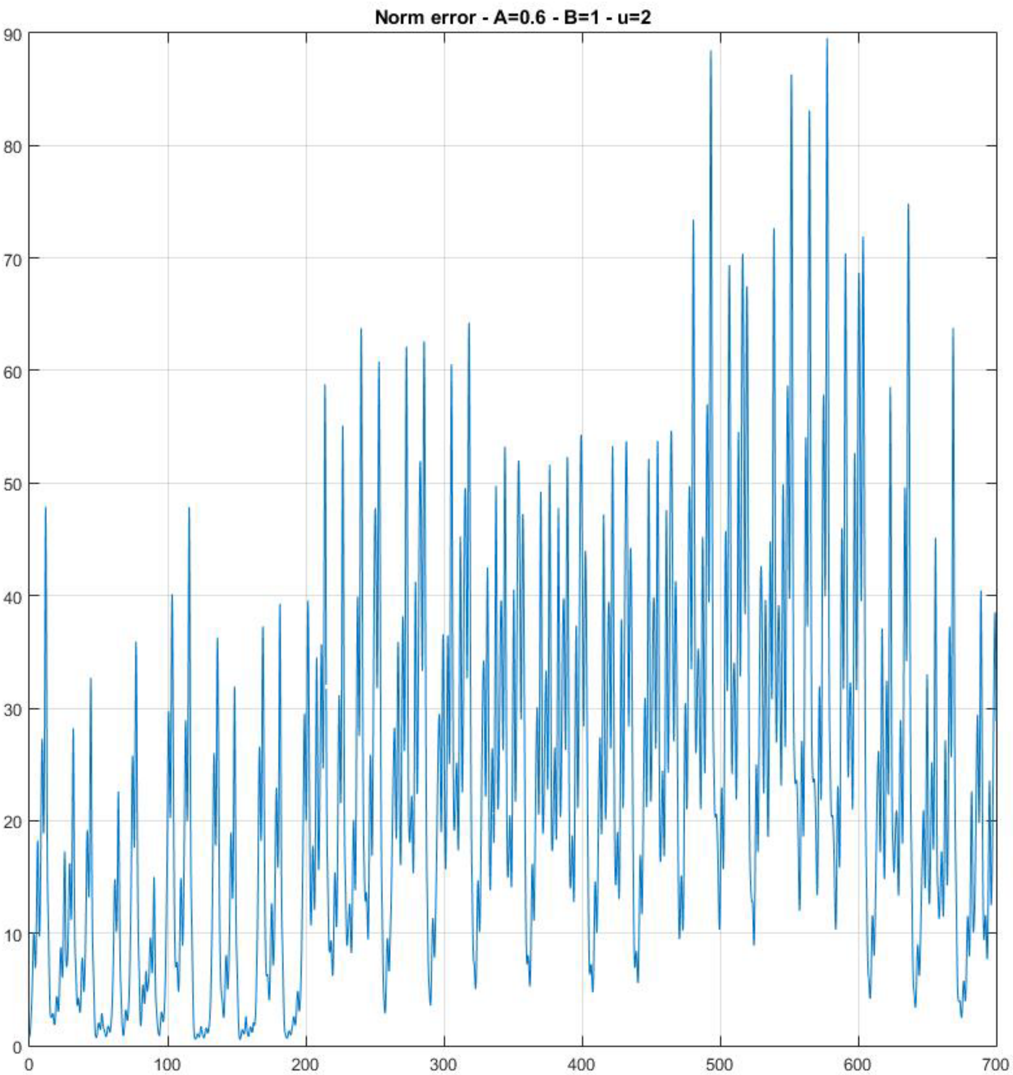
Per essere certi che si tratti di un attrattore caotico, di seguito viene considerato il sistema con:

$$A = 0.6, B = 1, u(t) = 2\ \forall t$$

e vengono analizzate le traiettorie del sistema considerando due stati iniziali differenti







Dai risultati ottenuti risulta evidente che per valori di $B > 0.6$, siamo di fronte ad un sistema dinamico deterministico che esibisce una sensibile dipendenza alle condizioni iniziali ed un comportamento asintotico aperiodico, pertanto compare un attrattore caotico.

In particolare si ha che:

- Per $B = 0.6$ vi è una coppia di poli complessi coniugati che attraversa l'asse immaginario ed il punto di equilibrio P_2 diventa instabile
- Per $B > 0.6$ purtroppo quello ottenuto per via simulativa non è l'unico attrattore del sistema, ma si può mostrare che, analizzando l'evoluzione dello stato, a partire da opportune condizioni iniziali lo stato diverge
- Per $B = 0.9$ si è vicini ad una soluzione periodica di periodo 2

7 ESPONENTI DI LYPAUNOV

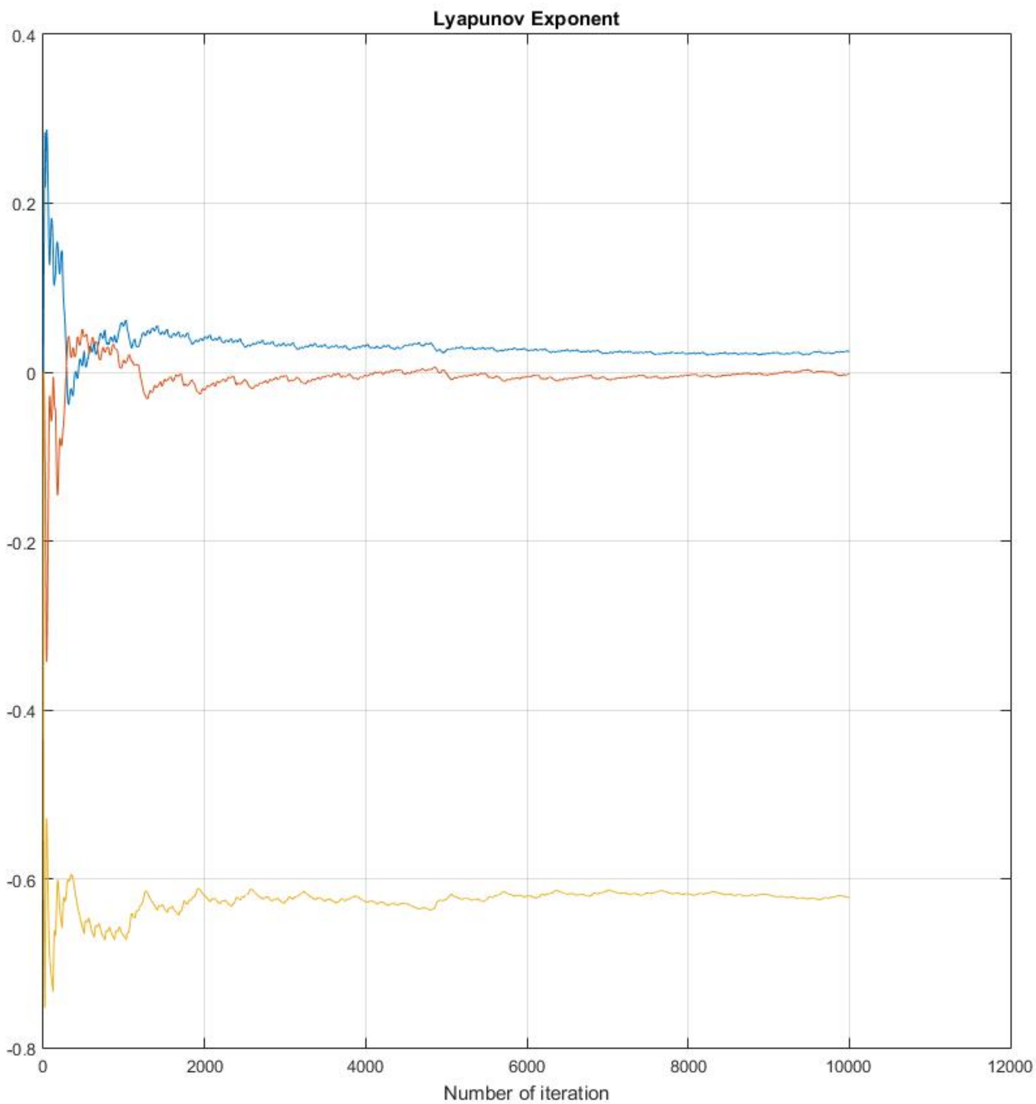
Consideriamo il sistema sovrariportato con i seguenti parametri:

$$A = 0.6, B = 1, u(t) = k \ \forall t$$

ed uno stato iniziale tale che il sistema converga all'attrattore caotico sopraillustrato.

Gli esponenti di Lyapunov (LCEs) misurano la separazione nel tempo di due traiettorie che partono da due condizioni iniziali vicine e che convergono allo stesso attrattore caotico. [2]

Per il loro calcolo è stato utilizzato l'algoritmo proposto da [2]



Dall’analisi di questa figura notiamo che un esponente è positivo, uno è negativo ed uno è nullo in accordo con il fatto che abbiamo studiato una traiettoria che converge ad un attrattore caotico.

Inoltre possiamo osservare un'altra importante proprietà di questo circuito: l’esponente di Lyapunov più grande LCE $\lambda_1 \cong -0.6224$, mentre $\lambda_2 \cong -(\lambda_1 - A) = 0.224$

8 FEEDBACK LINEARIZATION - FBL

Essendo il sistema considerato in *forma canonica di controllabilità* (o anche detto in *forma compagna*), il problema di scegliere una trasformazione di stato ed un segnale di controllo tale da rendere il sistema lineare risulta banale.

Infatti detta: $f(\underline{x}) = B|x_1| - x_2 - Ax_3$, il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f(\underline{x}) - u \end{cases}$$

Scegliendo $u = f(\underline{x}) - v$ si ottiene il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = v \end{cases}$$

Scegliendo $v = -\underline{K}^T\,\underline{x} = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$

Si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \underline{x} \Leftrightarrow \dddot{x} + k_3\ddot{x} + k_2\dot{x} + k_1x = 0$$

Fortunatamente la matrice dinamica trovata è in forma compagna e quindi il polinomio caratteristico può essere scritto immediatamente come:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + k_3\lambda^2 + k_2\lambda + k_1$$

Scegliendo i valori del vettore $\underline{K}$ tali che gli autovalori della matrice dinamica sovrariportata siano tutti a parte reale negativa, si ha che l'origine dello spazio di stato è globalmente asintoticamente stabile (GAS).

Inoltre, scegliendo opportunamente i valori del vettore $\underline{K}$ è possibile fissare anche la velocità ed il modo con cui lo stato converge ad $x_0 = (0,0,0)$

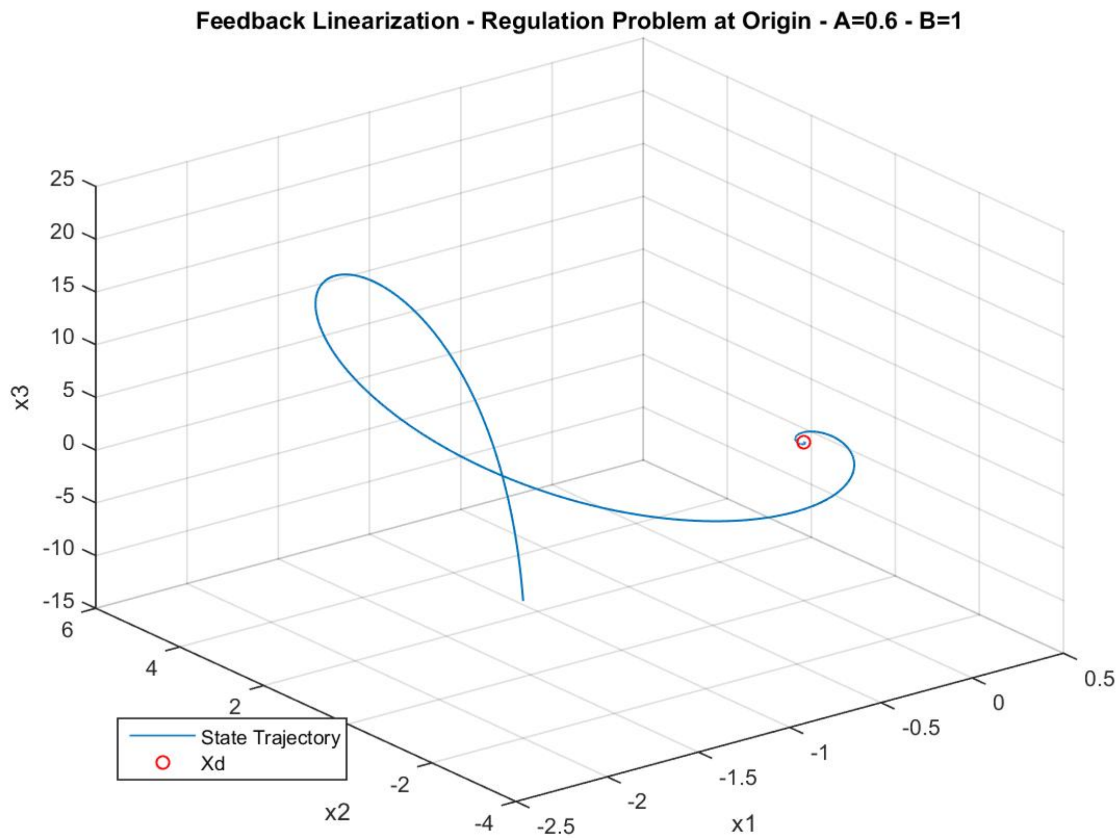
Di seguito è illustrato come scegliere i valori del vettore $\underline{K}$ per ottenere una dinamica del terzo ordine descritta da una coppia di poli complessi coniugati e da un polo reale:

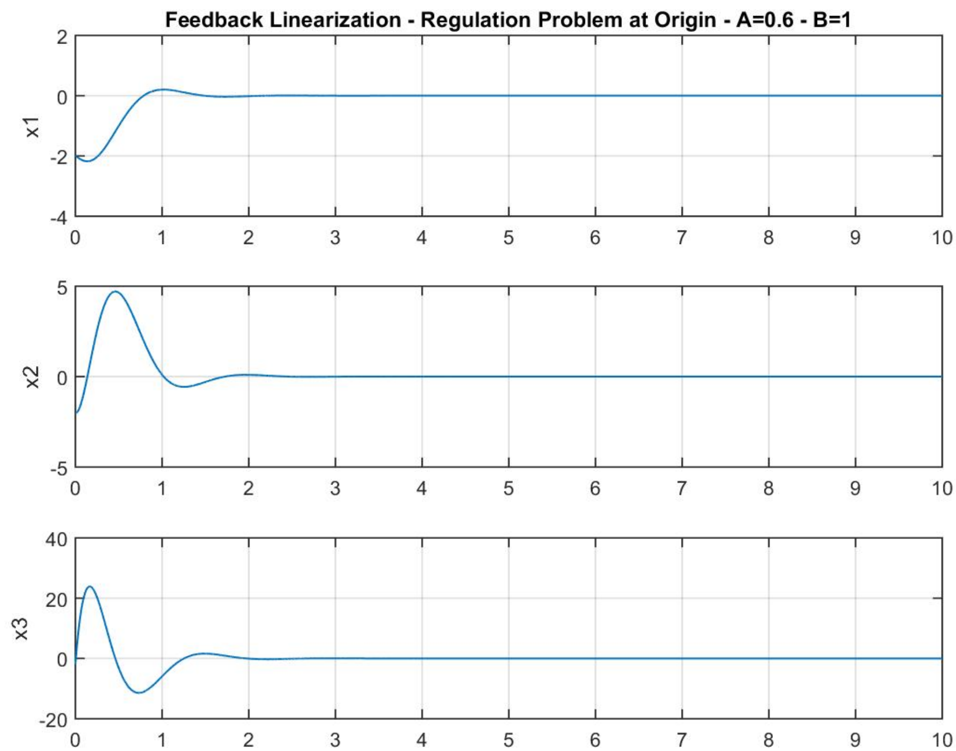
$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2)\left(\lambda + \frac{1}{\tau_1}\right) = \lambda^3 + \left(2\xi\omega_n + \frac{1}{\tau_1}\right)\lambda^2 + \left(\omega_n^2 + \frac{2\xi\omega_n}{\tau_1}\right)\lambda + \frac{\omega_n^2}{\tau_1}$$

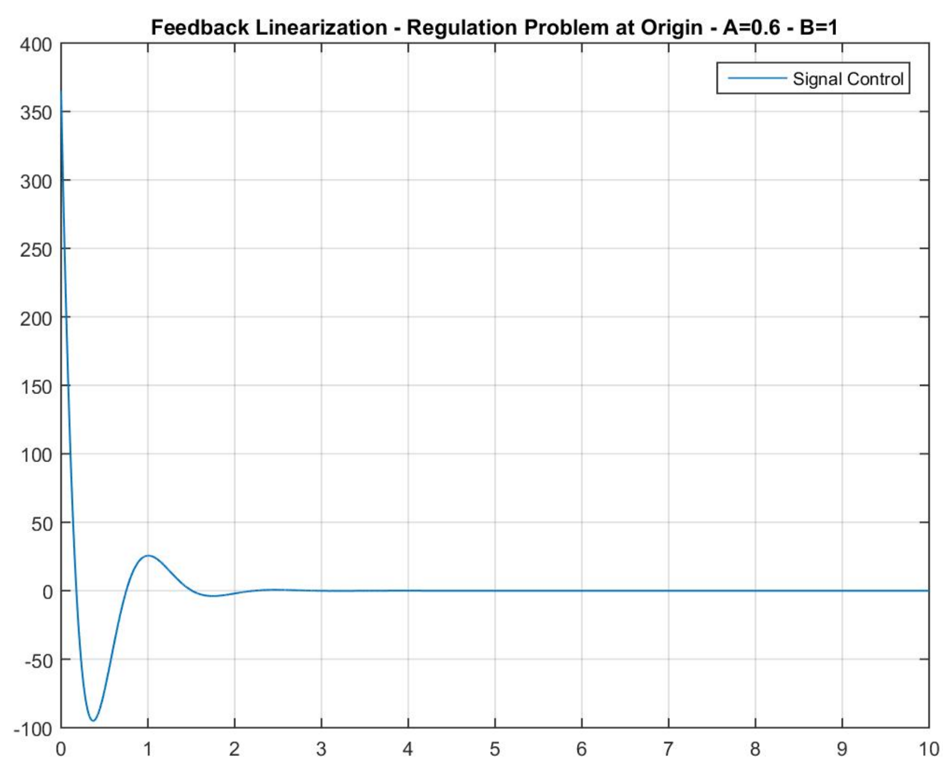
Scelti

$$\xi = 0.5, \omega_n = 5\, rad/s, \tau_1 = 0.25s$$

Risulta banale ricavare i valori del vettore $\underline{K}$ e di conseguenza il segnale di controllo.




Feedback Linearization - Regulation Problem at Origin - A=0.6 - B=1
x1
x2
x3


Feedback Linearization - Regulation Problem at Origin - A=0.6 - B=1
Signal Control

8.1 INSEGUIMENTO DI TRAIETTORIA

Risulta banale modificare il controllore, al fine di inseguire una generica traiettoria $x_d(t)$.

A tal fine, occorre scegliere

$$v = -\underline{K}^T\,\underline{x} + r$$

Ottenendo così:

$$\dddot{x} + k_3\ddot{x} + k_2\dot{x} + k_1 x = r$$

Detto l'errore di inseguimento di traiettoria: $\tilde{x} = x - x_d$

Scegliendo:

$$r = \dddot{x}_d + k_3\ddot{x}_d + k_2\dot{x}_d + k_1 x_d$$

Si ha che:

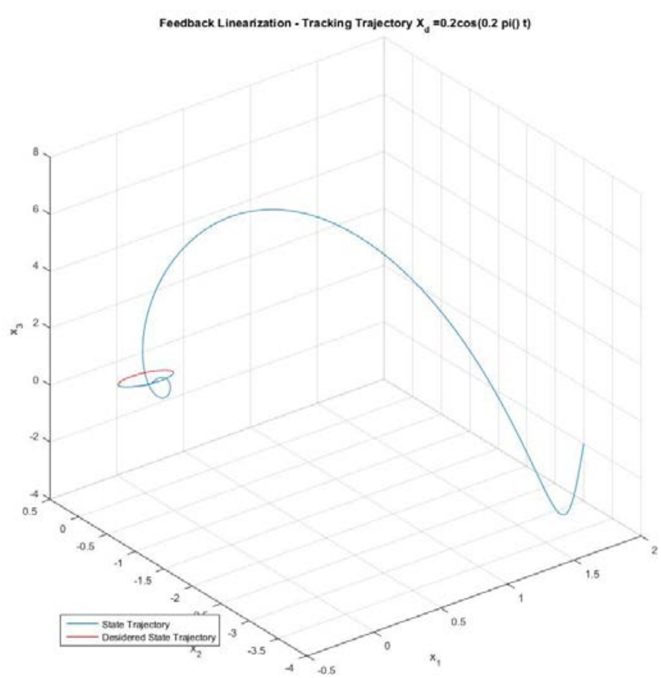
$$\dddot{\tilde{x}} + k_3\ddot{\tilde{x}} + k_2\dot{\tilde{x}} + k_1\tilde{x} = 0$$

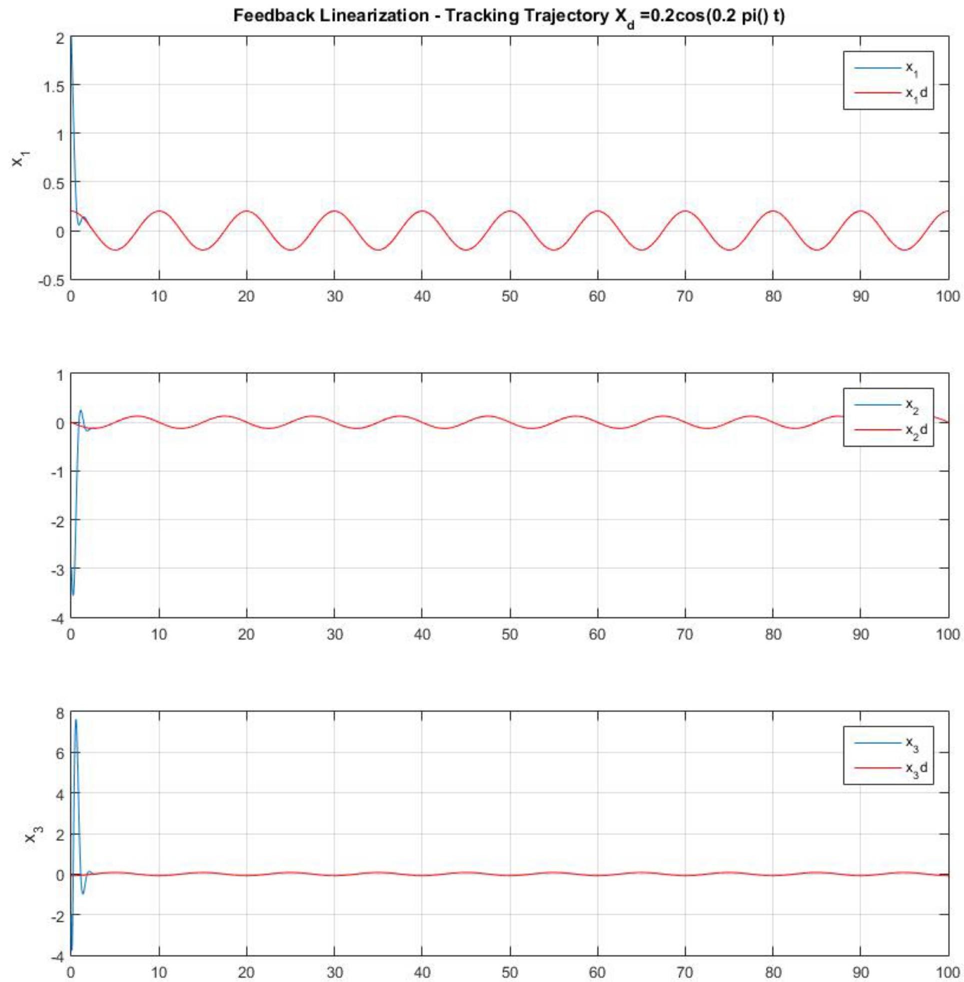
Nuovamente, scegliendo opportunamente i valori del vettore $\underline{K}$ si ottiene una convergenza asintotica alla traiettoria desiderata con dei modi di evoluzione che dipendono dai valori del vettore $\underline{K}$.

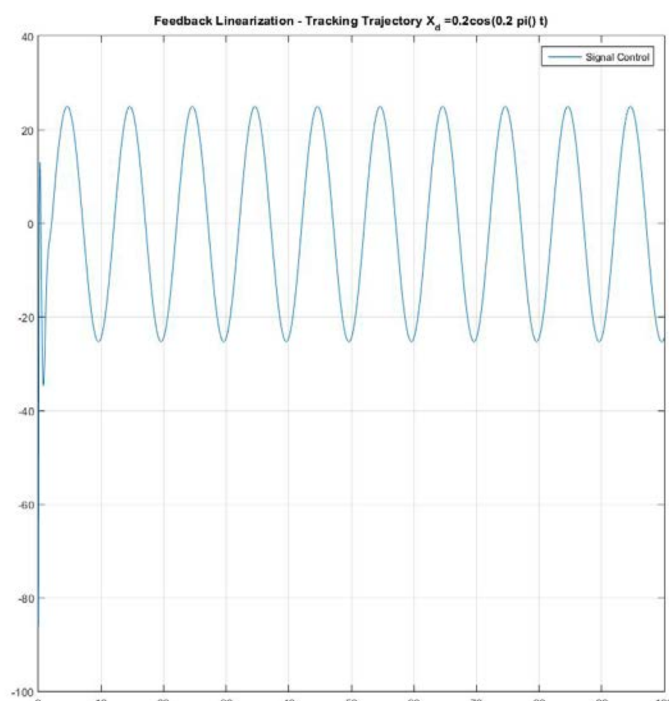
Di seguito vengono illustrate le simulazioni ottenute per

$$x_d(t) = 0.2\cos(0.2\pi t)$$

$$\xi = 0.5, \omega_n = 5\frac{rad}{s}, \tau_1 = 0.25s \Rightarrow K = [125 \quad 50 \quad 10]$$




Feedback Linearization - Tracking Trajectory X_d =0.2cos(0.2 pi() t)
x_1
x_1d
x_2
x_2d
x_3
x_3d


Feedback Linearization - Tracking Trajectory X_d =0.2cos(0.2 pi() t)
Signal Control

9 CONTROLLO SLIDING

Anche se non esplicitamente evidenziato con prove simulativa, è noto che il controllo tramite feedback linearization è poco robusto sia in presenza di incertezze parametriche che di modello.

Per affrontare sia le incertezze parametriche sia quelle di modello, si utilizza il controllo robusto ed il controllo adattativo.

Un semplice approccio al controllo robusto è il controllo sliding.

Ai fini del calcolo del controllo sliding scriviamo:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}u$$

Ove $\underline{g} = [0 \quad 0 \quad -1]'$

Senza scendere in dettagli teorici sul controllo sliding (disponibili [3]) verrà di seguito illustrata la possibilità di portare lo stato ad uno stato desiderato con tale approccio.

Detto l'errore di inseguimento di traiettoria: $\tilde{x} = x - x_d$,

definiamo la superficie di sliding come $s(\tilde{x}, t) = \ddot{\tilde{x}} + k_2\dot{\tilde{x}} + k_3\tilde{x} = \underline{K}^T\tilde{x}$

Un controllore discontinuo che è in grado di portare lo stato sulla superficie di sliding, è il seguente

$$u(\underline{x}) = -\frac{\mu\, sgn(s)}{\underline{K}^T g} - \frac{\underline{K}^T\, \underline{f}(\underline{x})}{\underline{K}^T g}$$

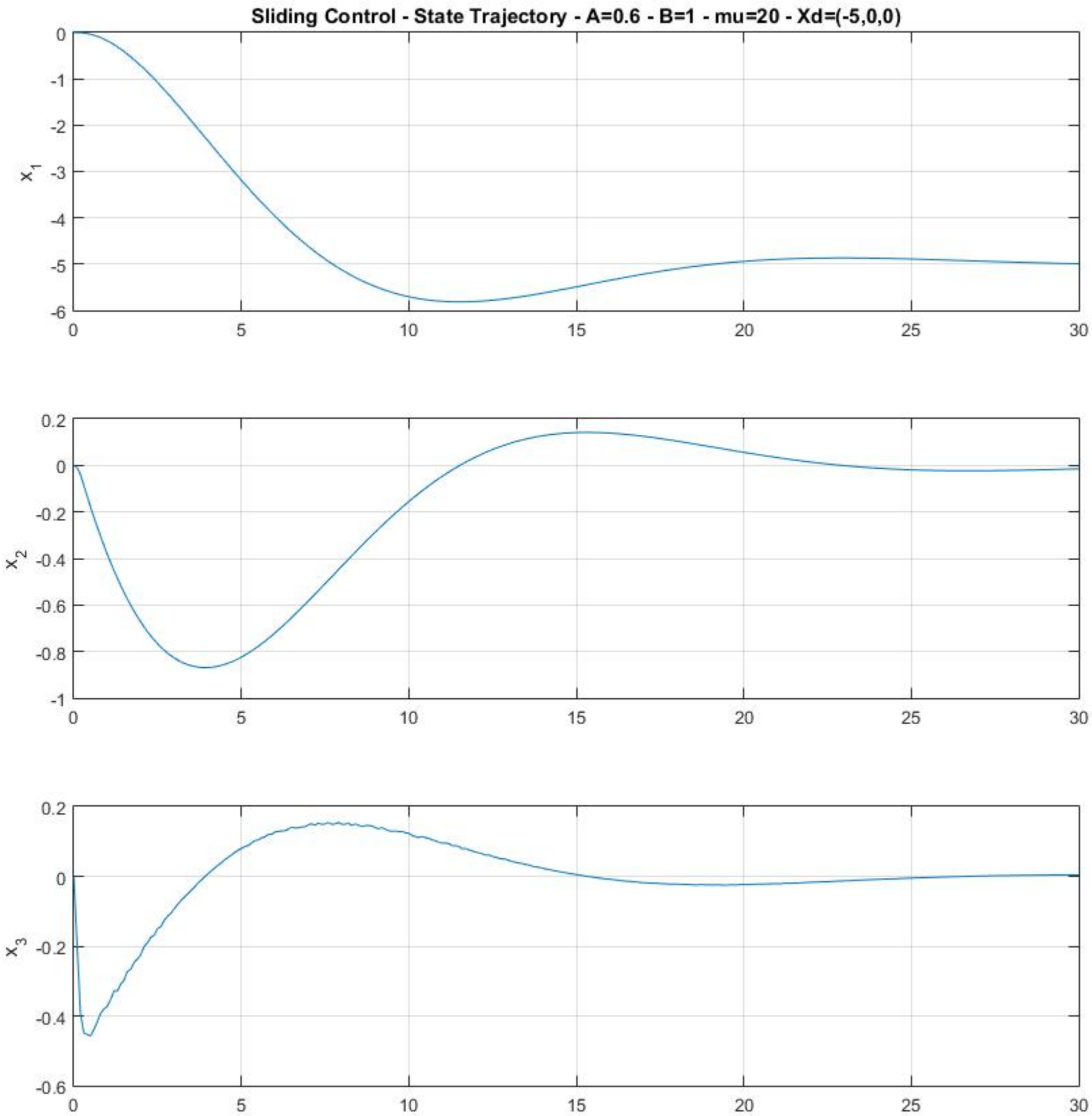
I risultati ottenuti scegliendo

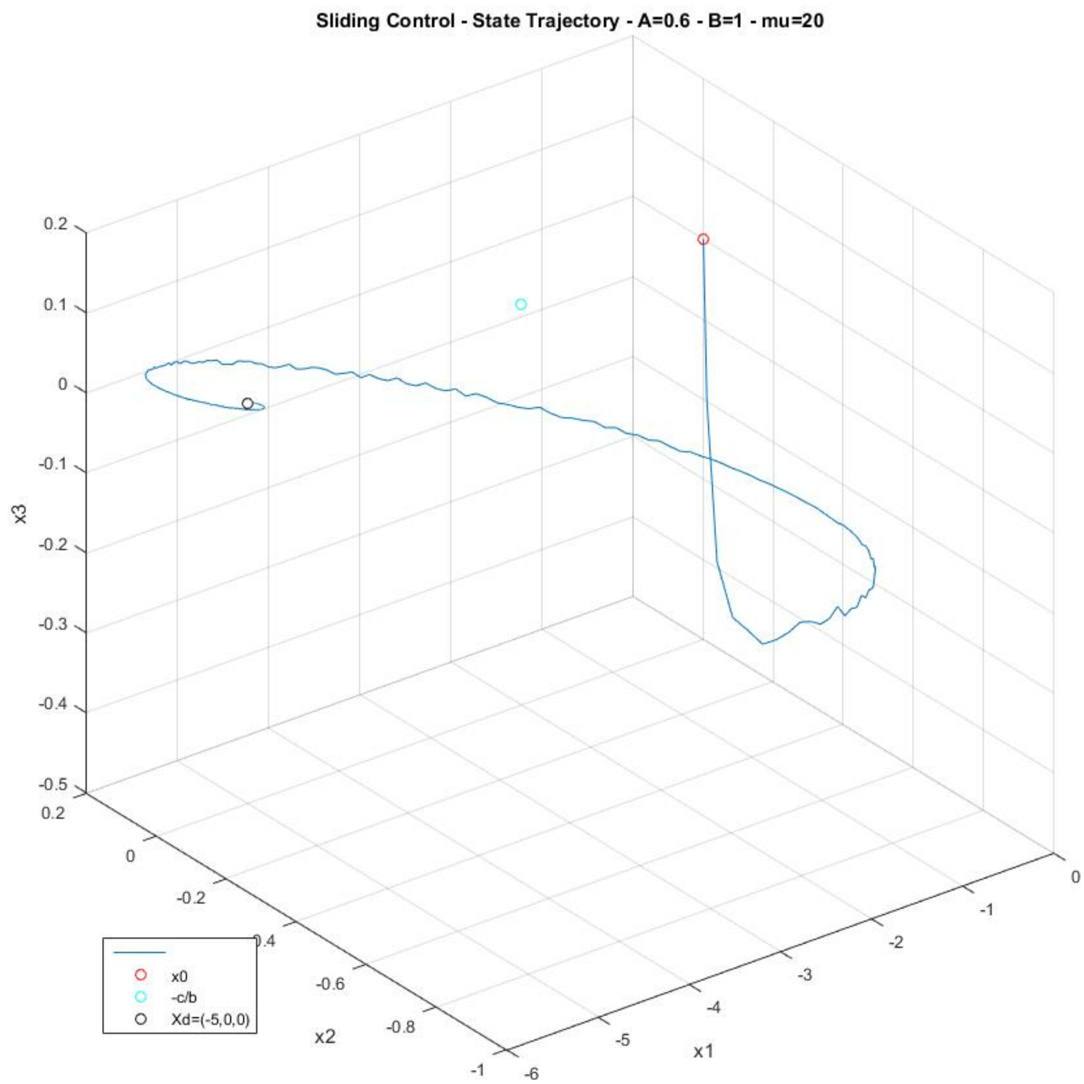
$$\xi = 0.5, \omega_n = \pi\, rad/s, \mu = 20$$

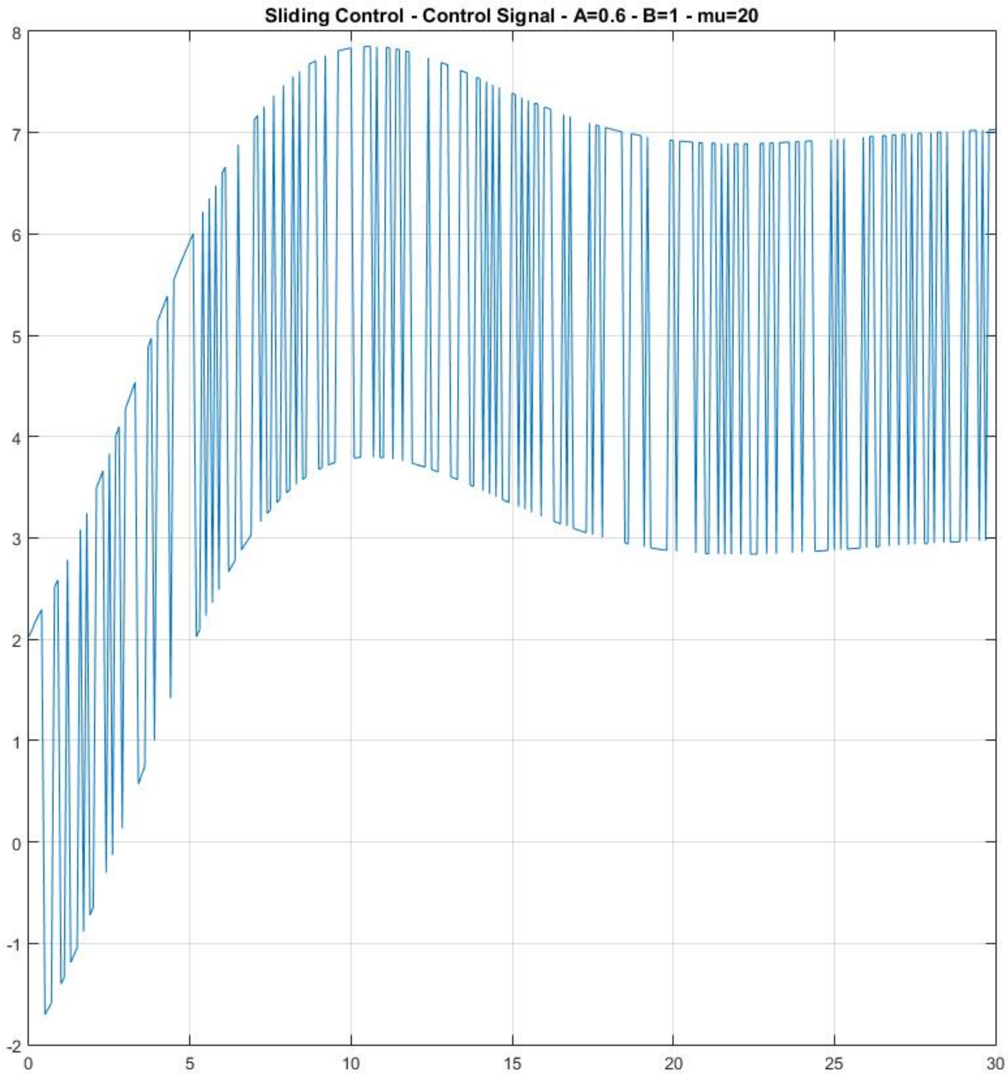
$$\underline{K}^T = [1 \quad 2\xi\omega_n \quad \omega_n^2]$$

$$x_d = [-5 \quad 0 \quad 0]'$$

sono di seguito illustrati:


Sliding Control - State Trajectory - A=0.6 - B=1 - mu=20 - Xd=(-5,0,0)
x1
x2
x3
0
5
10
15
20
25
30


Sliding Control - State Trajectory - A=0.6 - B=1 - mu=20
x3
x2
x1
x0
-c/b
Xd=(-5,0,0)



Ovviamente possiamo notare sul segnale di controllo i problemi classici del controllo sliding.

10 CONTROLLO DISTRIBUITO DI SISTEMI MULTI-AGENTE

10.1 CRITERIO DI COLLEGAMENTO FRA I NODI

Per affrontare lo studio di una rete di circuiti caotici, si illustra, prima il criterio con cui si collegano due circuiti caotici, con un esempio di due circuiti.

A tal fine riscriviamo il nostro modello, indicando una funzione di uscita ed un secondo ingresso

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = B|x_1| - x_2 - Ax_3 - u \\ y_1 = C\underline{x} = x_1 \end{cases}$$

Pertanto il nostro sistema ora diventa:

- Con tre stati
- Due ingressi
- Una uscita (ovviamente cambiando la dimensione e i valori della matrice C si possono facilmente ottenere differenti problemi di rete)

Scegliendo di accoppiare i due sistemi con una legge diffusiva si ha che:

$$\begin{gathered} \underline{\dot{x}}_1 = \underline{f}(\underline{x}_1, u) + \tilde{u}_1 \\ y_1 = C\underline{x}_1 = x_{11} \\ \underline{\dot{x}}_2 = \underline{f}(\underline{x}_2, u) + \tilde{u}_2 \\ y_2 = C\underline{x}_2 = x_{21} \end{gathered}$$

$$\tilde{u}_1 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{1j}\, y_j$$

$$\tilde{u}_2 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{2j}\, y_j$$

Che in forma esplosa, per le proprietà della matrice Laplaciana, diventa

$$\begin{gathered} \underline{\dot{x}}_1 = \underline{f}(\underline{x}_1, u) + C\tilde{u}_1 \\ \underline{\dot{x}}_2 = \underline{f}(\underline{x}_2, u) + C\tilde{u}_2 \end{gathered}$$

$$\tilde{u}_1 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{1j}\, x_j$$

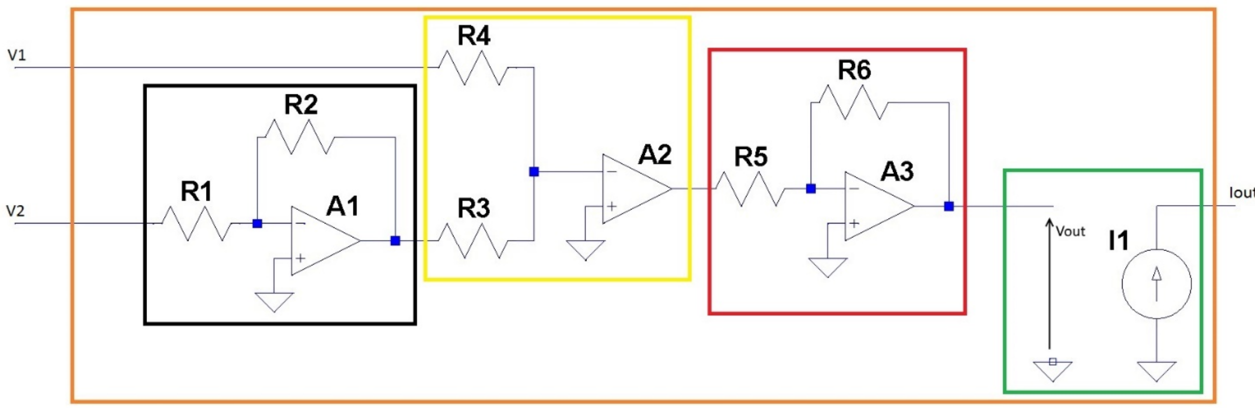
Ove

$$C = [0\ 0\ 1]'$$

$$\tilde{u}_2 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{2j}\, x_j$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_{11} = x_{12} \\
\dot{x}_{12} = x_{13} \\
\dot{x}_{13} = B|x_{11}| - x_{12} - Ax_{13} - u_1 + \sigma(x_{11} - x_{21}) \\
\dot{x}_{21} = x_{22} \\
\dot{x}_{22} = x_{23} \\
\dot{x}_{23} = B|x_{21}| - x_{22} - Ax_{23} - u_2 + \sigma(x_{21} - x_{11}) \\
y_1 = C\underline{x} = x_{11} \\
y_2 = C\underline{x} = x_{21}
\end{cases}
$$

Ciò significa che i circuiti del tipo rappresentato in figura 3 dovranno essere collegati tramite un circuito di accoppiamento di questo tipo:



- In questo circuito le resistenze rappresentate sono tutte dello stesso valore, eccetto per le resistenze R5 ed R6, che devono essere scelte opportunamente in base al valore di sigma
- Si suppone che i segnali di ingresso di questo circuito sono le uscite dei singoli nodi, ovvero, le uscite dei circuiti rappresentati in Figura1 che risultano essere segnali di tensione
- L'unione dei blocchi nero e giallo realizzano un nodo sommatore invertente, ovvero calcolano la quantità $-(v_1 - v_2) = v_2 - v_1$
- Il circuito in rosso è un amplificatore invertente che calcola la quantità $\sigma(v_2 - v_1) = -\frac{R_6}{R_7}(v_2 - v_1)$
- Il circuito evidenziato in verde è un generatore di corrente ideale $Iout = Vout$

10.2 ANALISI DI UNA RETE CON QUATTRO NODI

10.2.1 Premessa: Norma degli errori

Al fine di studiare la sincronizzazione dei vari nodi, verranno considerate le norme degli errori fra il primo nodo ed i restanti.

Norma dell'errore fra il primo ed il secondo nodo

$$e_{12}(t) = [x_{11}(t) - x_{21}(t) \quad x_{12}(t) - x_{22}(t) \quad x_{13}(t) - x_{23}(t)]'$$

$$\|e_{12}(t)\| = e_{11}^T(t)\, e_{11}(t)$$

Norma dell'errore fra il primo ed il terzo nodo

$$e_{13}(t) = [x_{11}(t) - x_{31}(t) \quad x_{12}(t) - x_{32}(t) \quad x_{13}(t) - x_{33}(t)]'$$

$$\|e_{13}(t)\| = e_{13}^T(t)\, e_{13}(t)$$

Norma dell'errore fra il primo ed il quarto nodo

$$e_{14}(t) = [x_{11}(t) - x_{41}(t) \quad x_{12}(t) - x_{42}(t) \quad x_{13}(t) - x_{43}(t)]'$$

$$\|e_{14}(t)\| = e_{14}^T(t)\, e_{14}(t)$$

Ovviamente se la norma dell'errore fra il primo nodo ed il secondo si annulla e quella fra il primo nodo ed il terzo si annulla, sarà nulla anche quella fra il secondo e il terzo.

Per tale motivo si considerano di seguito solo questi tre segnali.

■

Si consideri la seguente rete di sistemi dinamici del tipo illustrato Figura 3 e collegati nel modo descritto nel paragrafo precedente.

Per ogni sistema si scelgono i parametri

$$A = 0.6, B = 1, u(t) = 2\ \forall t$$

in modo tale che i circuiti possano esibire singolarmente dei comportamenti caotici.

Descrivendo la struttura della rete tramite la matrice di adiacenza fra i nodi e la matrice laplaciana l'evoluzione della rete sarà descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = \underline{f}(\underline{x}_1, u_1) + C\tilde{u}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 = \underline{f}(\underline{x}_2, u_2) + C\tilde{u}_2 \\ \dot{\underline{x}}_3 = \underline{f}(\underline{x}_3, u_3) + C\tilde{u}_1 \\ \dot{\underline{x}}_4 = \underline{f}(\underline{x}_4, u_4) + C\tilde{u}_2 \\ \quad y_1 = C\underline{x}_1 = x_{11} \\ \quad y_2 = C\underline{x}_2 = x_{21} \\ \quad y_3 = C\underline{x}_3 = x_{31} \\ \quad y_4 = C\underline{x}_4 = x_{41} \end{cases}$$

$$\tilde{u}_1 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{1j}\, x_j$$

$$\tilde{u}_2 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{2j}\, x_j$$

$$\tilde{u}_3 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{3j}\, x_j$$

$$\tilde{u}_4 = \sigma \sum_{j=1}^{2} G_{4j}\, x_j$$

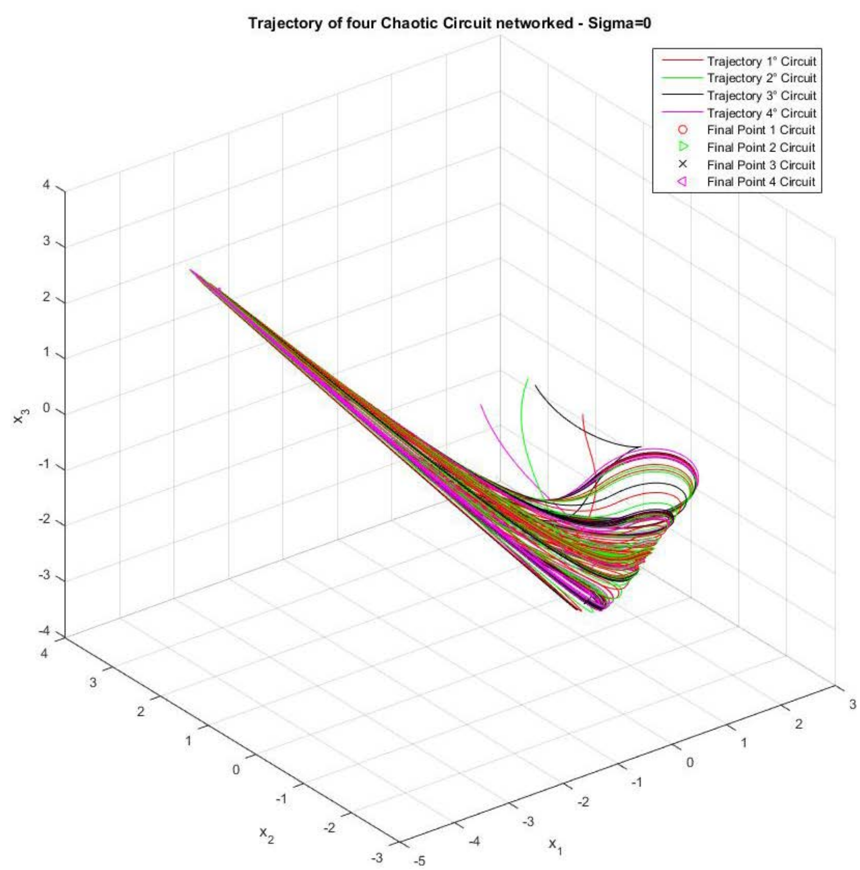
Ove

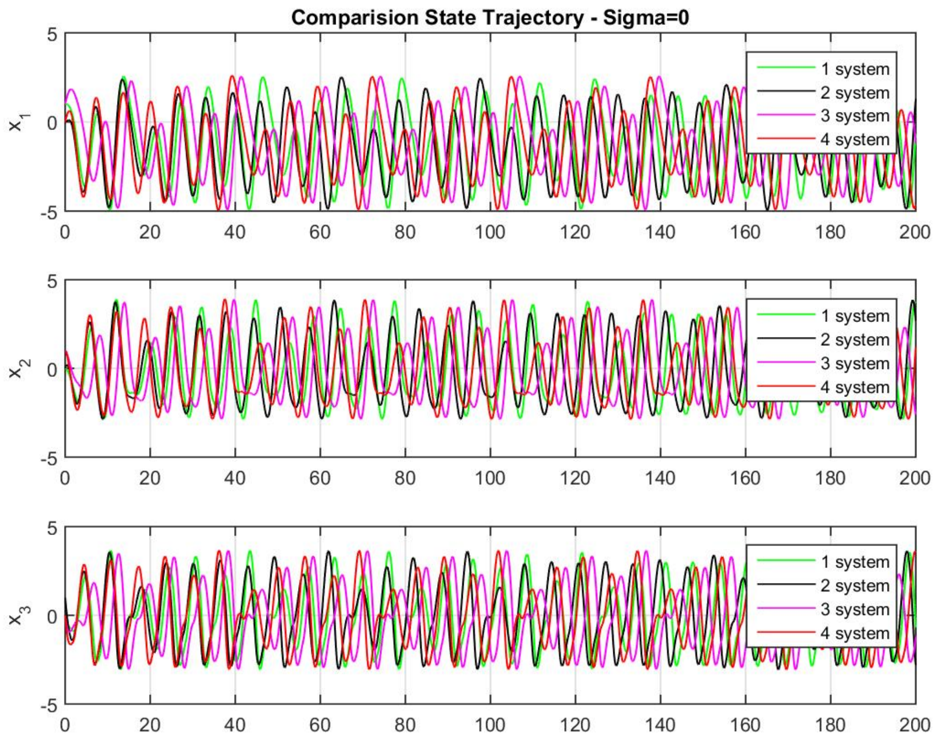
$$C = [0\ 0\ 1]'$$

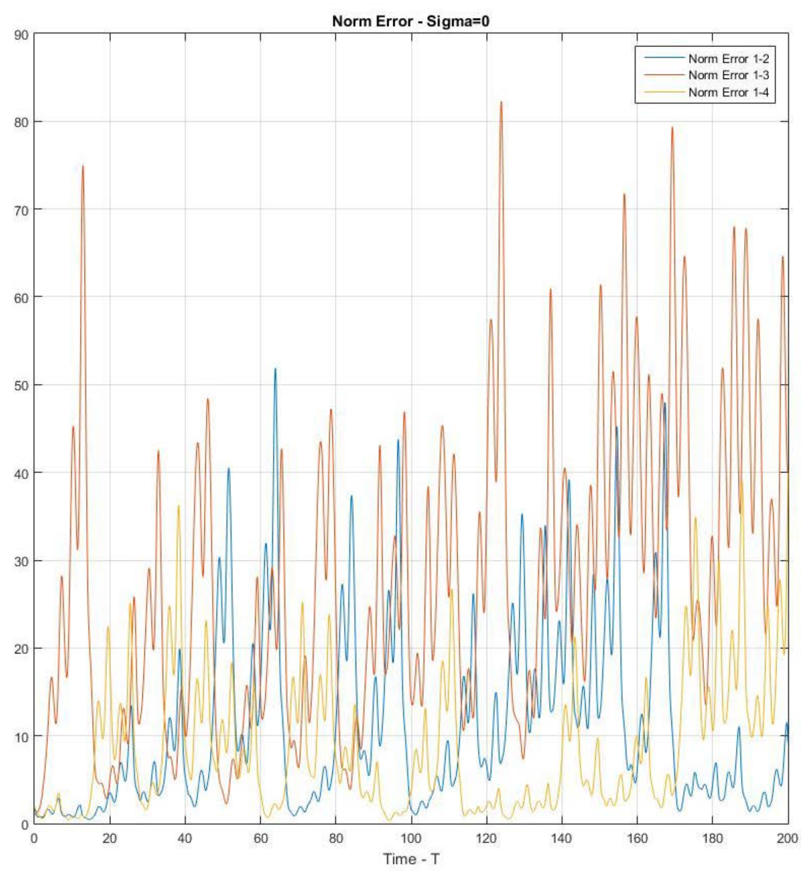
10.2.2 Caso $\boldsymbol{\sigma = 0}$

Ovviamente per $\sigma = 0$, si ha una rete di 4 nodi in cui le interconnessioni perdono di significato e quindi si hanno quattro sistemi che evolvono indipendentemente.

Ovviamente non essendoci collegamento fra i nodi dall'analisi delle norme degli errori si evince che non vi è sincronizzazione.




Comparision State Trajectory - Sigma=0
1 system
2 system
3 system
4 system
x_1
x_2
x_3


Norm Error - Sigma=0
Norm Error 1-2
Norm Error 1-3
Norm Error 1-4
Time - T

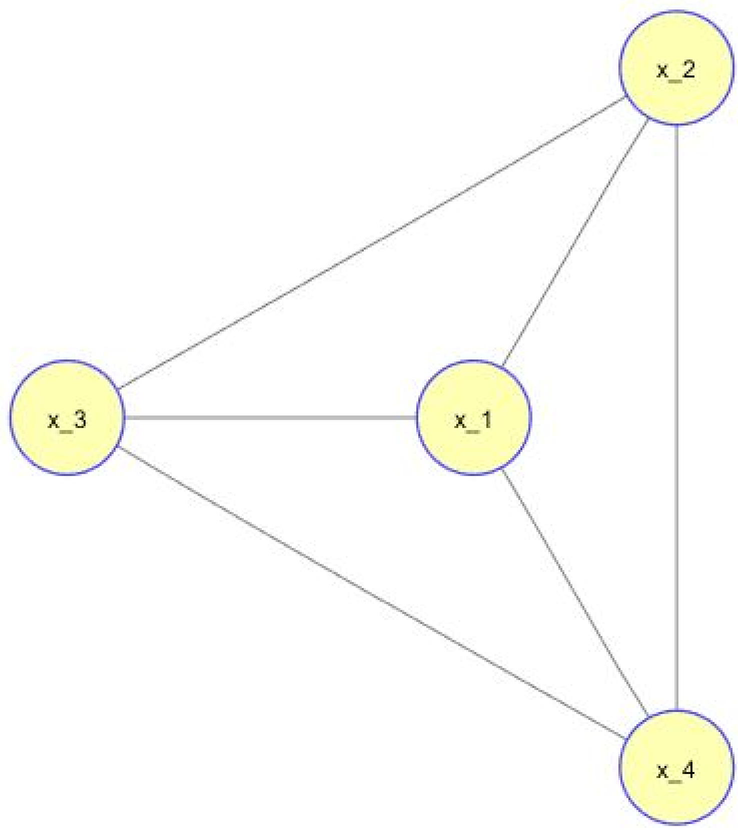
10.2.3 Rete Totalmente Connessa - $\boldsymbol{\sigma = -3}$

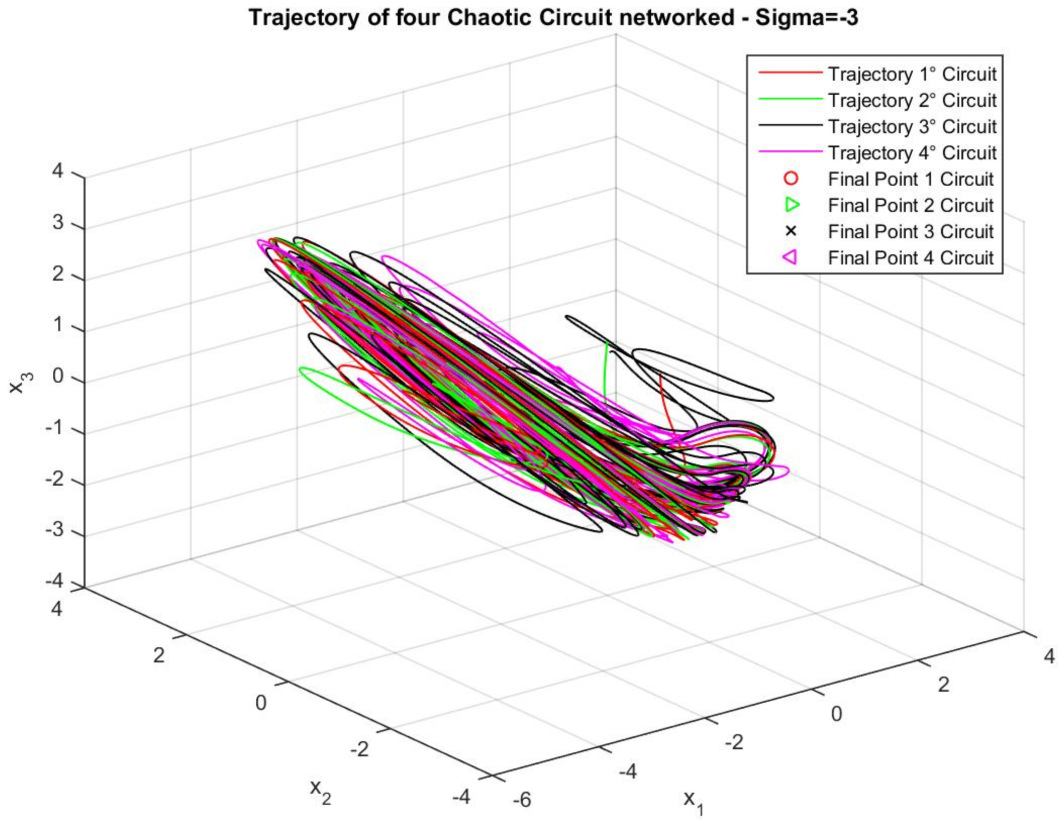
Matrice di Adiacenza

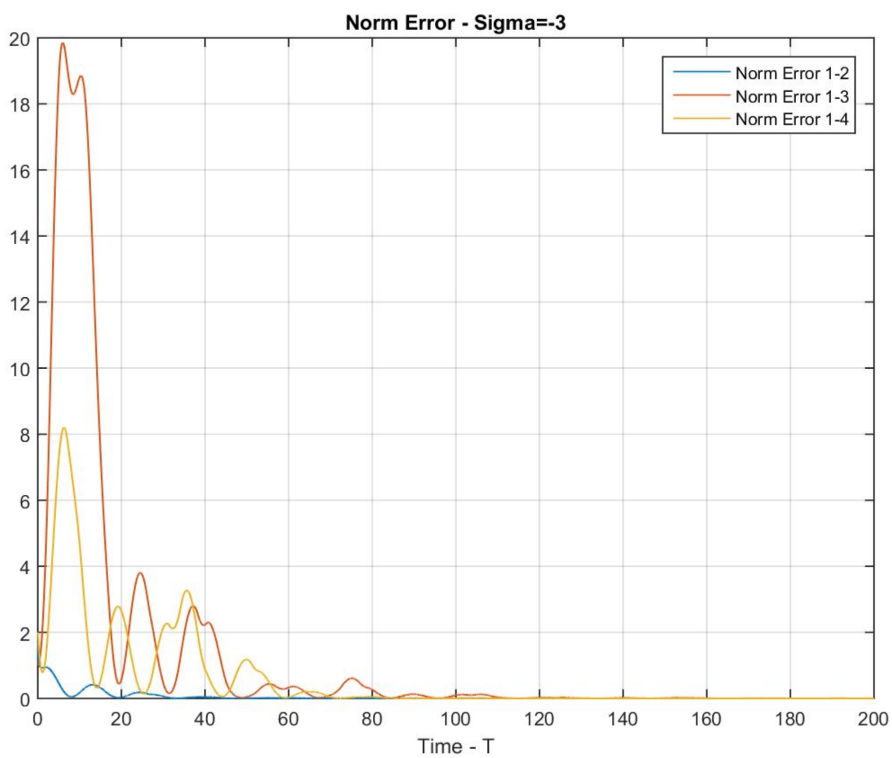
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

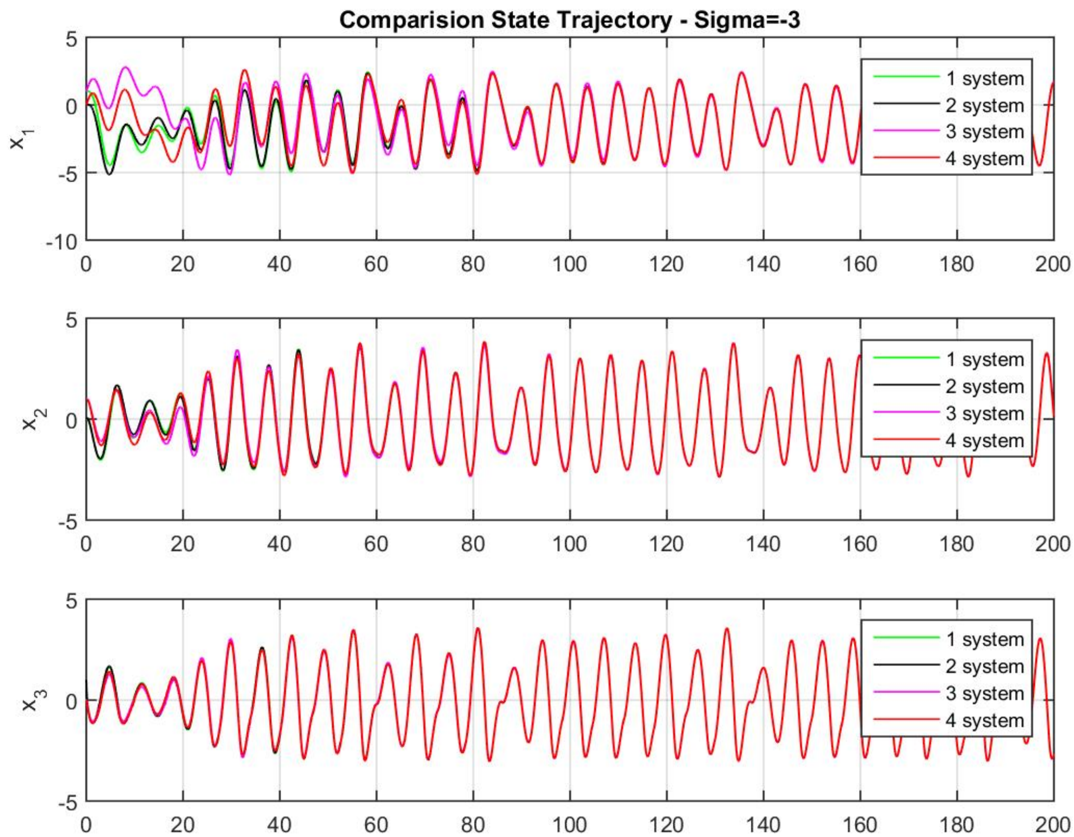
Matrice Laplaciana

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$




Trajectory of four Chaotic Circuit networked - Sigma=-3
Trajectory 1° Circuit
Trajectory 2° Circuit
Trajectory 3° Circuit
Trajectory 4° Circuit
Final Point 1 Circuit
Final Point 2 Circuit
Final Point 3 Circuit
Final Point 4 Circuit
x3
x2
x1


Norm Error - Sigma=-3
Norm Error 1-2
Norm Error 1-3
Norm Error 1-4
Time - T



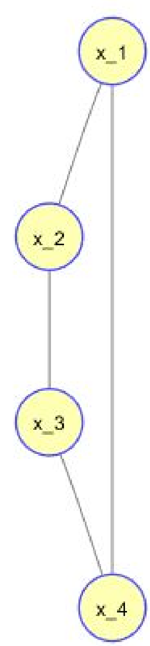
10.2.4 Rete ad Anello - $\boldsymbol{\sigma = -3}$

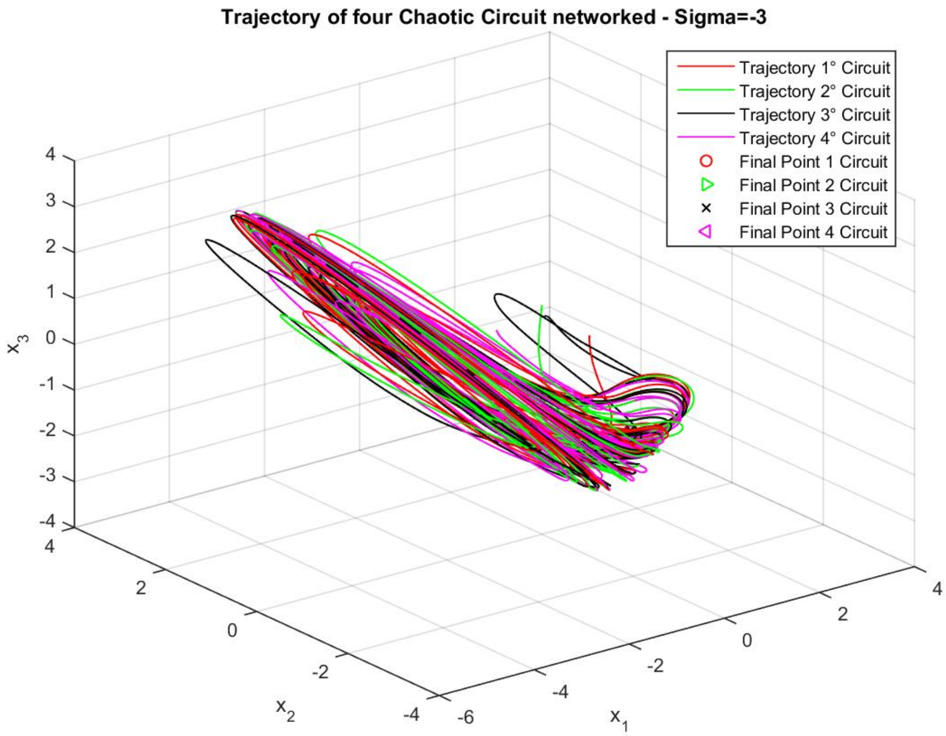
Matrice di Adiacenza

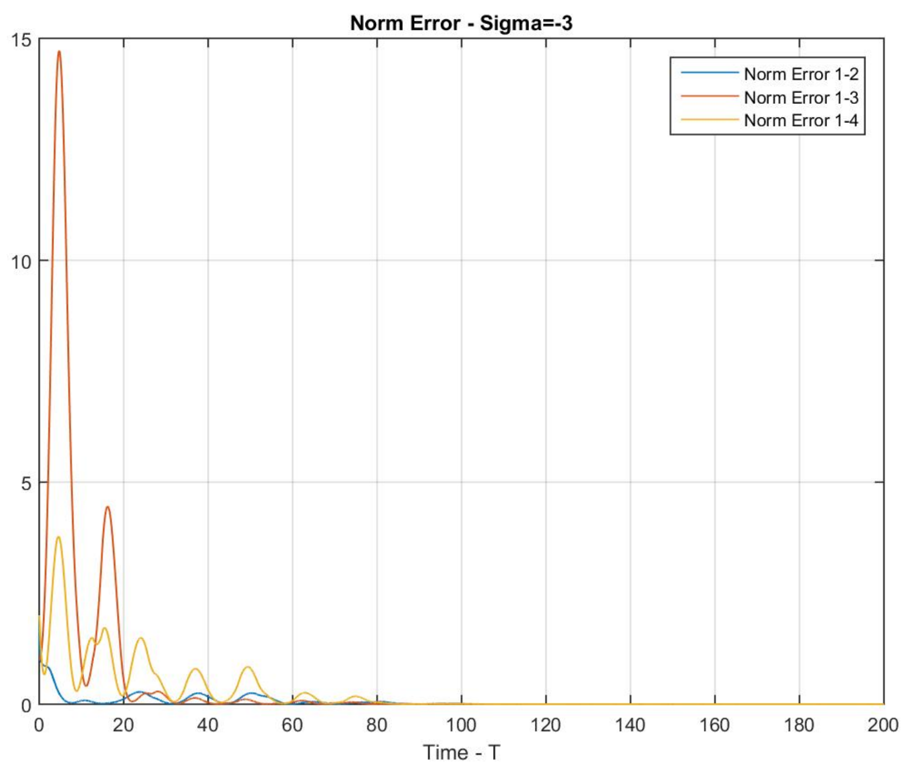
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

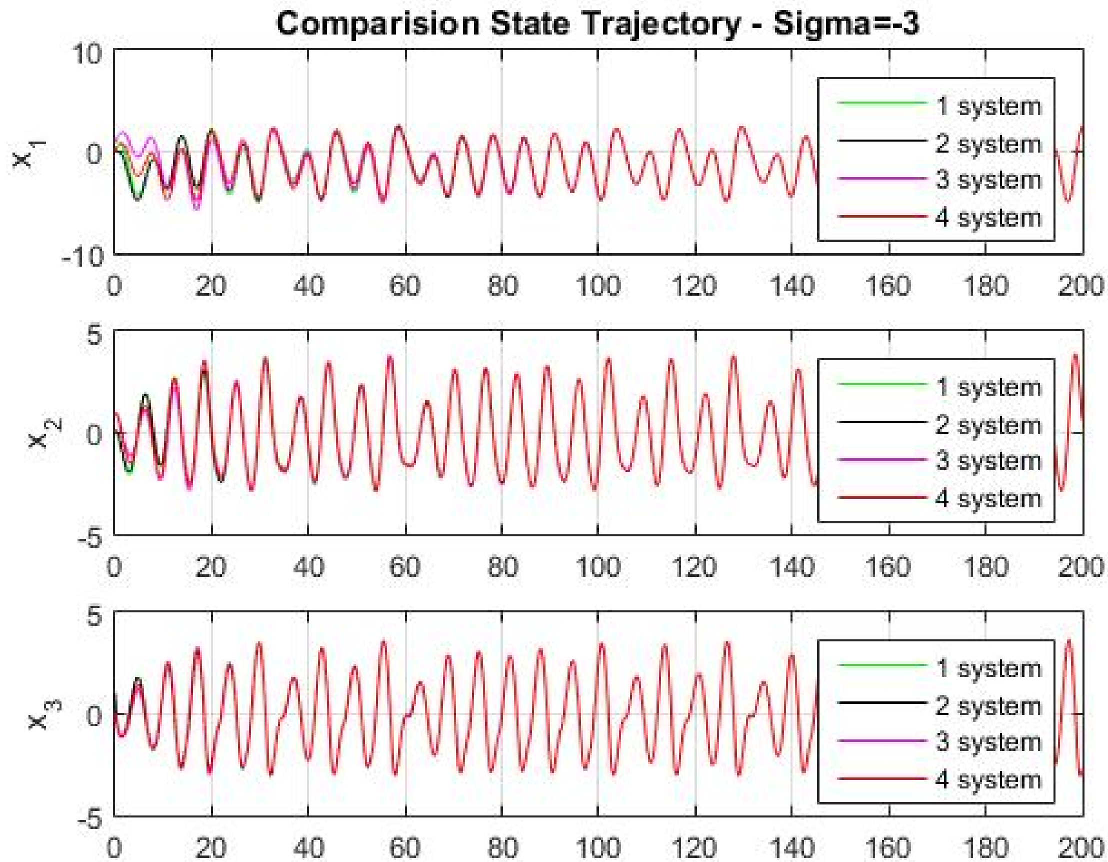
Matrice Laplaciana

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$




Trajectory of four Chaotic Circuit networked - Sigma=-3
Trajectory 1° Circuit
Trajectory 2° Circuit
Trajectory 3° Circuit
Trajectory 4° Circuit
Final Point 1 Circuit
Final Point 2 Circuit
Final Point 3 Circuit
Final Point 4 Circuit
x3
x2
x1


Norm Error - Sigma=-3
Norm Error 1-2
Norm Error 1-3
Norm Error 1-4
Time - T



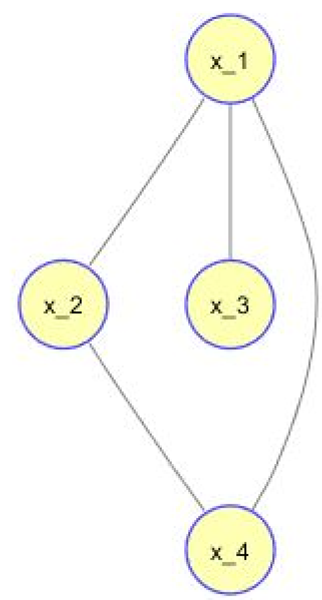
10.2.5 Rete Generica - $\boldsymbol{\sigma = -3}$

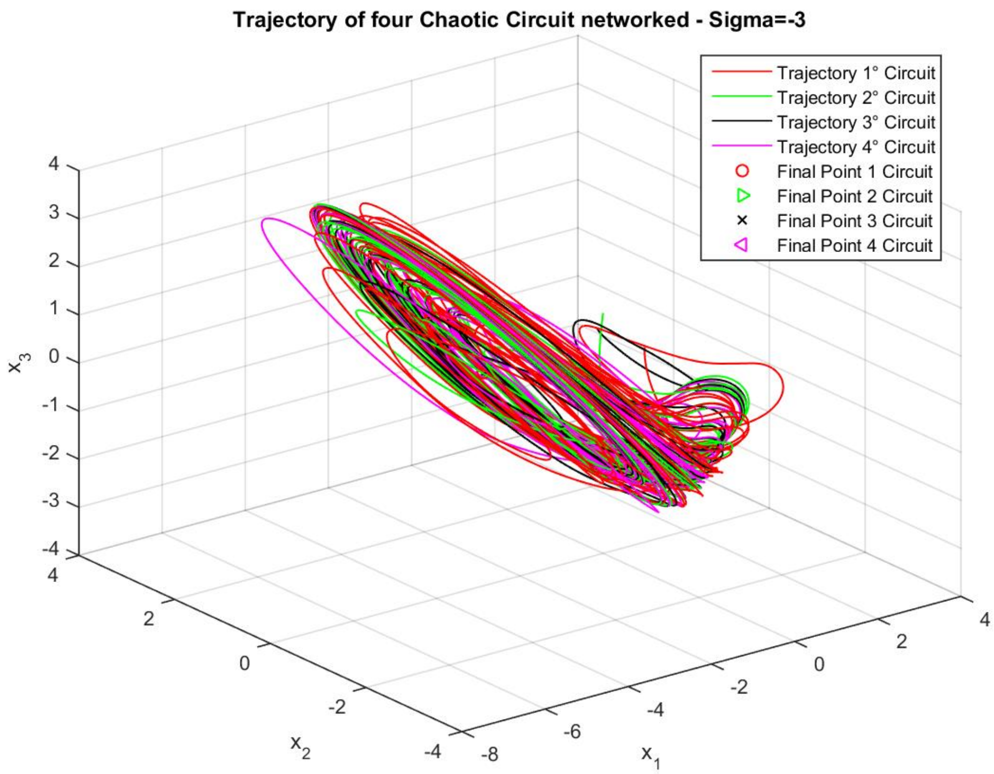
Matrice di Adiacenza

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

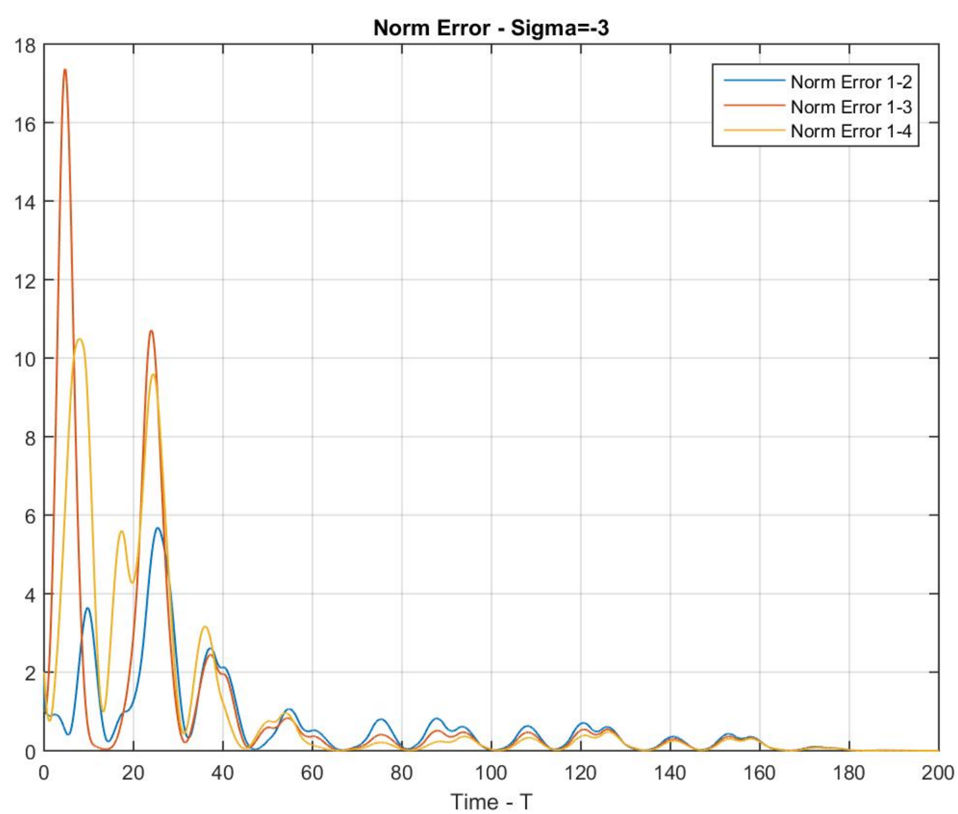
Matrice Laplaciana

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

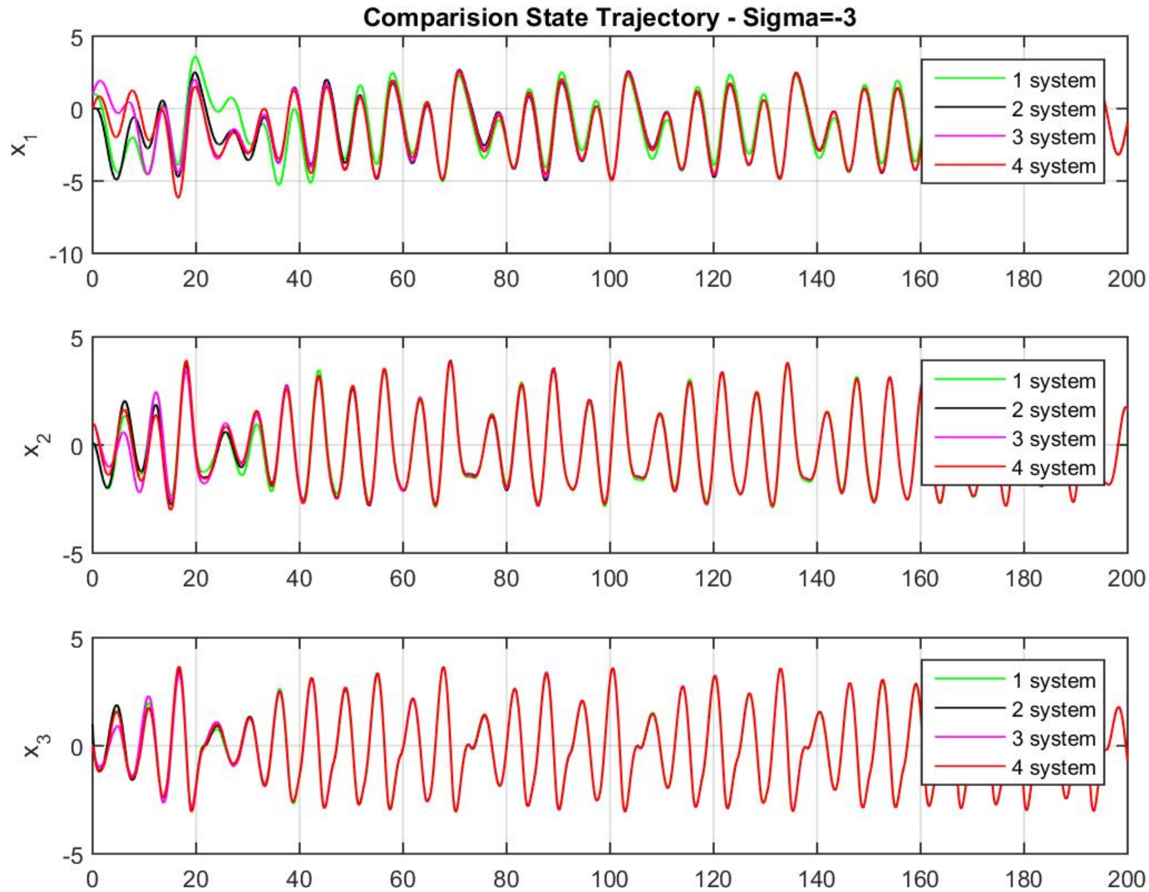




Trajectory of four Chaotic Circuit networked - Sigma=-3
Trajectory 1° Circuit
Trajectory 2° Circuit
Trajectory 3° Circuit
Trajectory 4° Circuit
Final Point 1 Circuit
Final Point 2 Circuit
Final Point 3 Circuit
Final Point 4 Circuit
x_3
x_2
x_1



Norm Error - Sigma=-3
Norm Error 1-2
Norm Error 1-3
Norm Error 1-4
Time - T



10.2.6 Conclusioni

Risulta evidente che la rete ad anello è la rete che sincronizza nel minor tempo.

11 BIBLIOGRAFIA

[1] J. Sprott, «A new class of chaotic circuit».

[2] U. d. V. I. Marco Sandri, «Numerical Calculation of Lyapunov Exponents».

[3] W. L. Jean-Jacques E.Slotine, «Applied nonlinear Control».

NOTA BENE:

Questo documento, purtroppo, non è stato sottoposto a revisione ed alcune parti sono incomplete.

Chiunque voglia collaborare, segnalare errori e/o integrare parti può scrivere all'autore.